

## Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (03.05.2012)

Date: Thu May 03 14:19:24 CEST 2012

Duration: 86:19 min

Pages: 57

### Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass aus (2) die Bedingung (3) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in  $s_1, \dots, s_n$ . Wenn  $s_1 = \dots = s_n = 1$  gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung  $s_1 = 0$ . Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}].$$

Darauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}], \end{aligned}$$

woraus die Behauptung wegen  $1 - \Pr[A_1] = \Pr[\bar{A}_1]$  folgt.

### Beweis (Forts.):

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (3)  $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$  folgt. Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\begin{aligned} \Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \sum_{s_3=0,1} \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \sum_{s_n=0,1} \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2], \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung.  $\square$

Aus der Darstellung in Lemma 26 folgt die wichtige Beobachtung, dass für zwei unabhängige Ereignisse  $A$  und  $B$  auch die Ereignisse  $\bar{A}$  und  $B$  (und analog auch  $A$  und  $\bar{B}$  bzw.  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ ) unabhängig sind!

Ebenso folgt:

### Lemma 27

Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  unabhängige Ereignisse. Dann sind auch  $A \cap B$  und  $C$  bzw.  $A \cup B$  und  $C$  unabhängig.

#### Beweis:

Zur Unabhängigkeit von  $A \cap B$  und  $C$  siehe das vorangehende Beispiel.

Aus

$$\begin{aligned}\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\ &= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \\ &= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C]\end{aligned}$$

folgt die Unabhängigkeit von  $A \cup B$  und  $C$ .  $\square$

## 4. Satz von Bayes

### Satz 28 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  seien paarweise disjunkt, mit  $\Pr[A_j] > 0$  für alle  $j$ . Ferner sei  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  ein Ereignis mit  $\Pr[B] > 0$ . Dann gilt für ein beliebiges  $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  mit  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

#### 4. Satz von Bayes

##### Satz 28 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  seien paarweise disjunkt, mit  $\Pr[A_j] > 0$  für alle  $j$ . Ferner sei  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  ein Ereignis mit  $\Pr[B] > 0$ . Dann gilt für ein beliebiges  $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  mit  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

Seien  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$  Krankheiten und  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$  Symptome.

Wir definieren Ereignisse:

$K_i =$  Der Patient hat die Krankheit  $\mathcal{K}_i$   
 $S_j =$  Der Patient zeigt das Symptom  $\mathcal{S}_j$

Eine **Belegung** der Symptome ist ein Element von  $\{0, 1\}^m$ . Jedem Patient kann eine Belegung zugeordnet werden, die angibt, welche Symptome im Patient vorhanden ( $\mathcal{B}(j) = 1$ ) und abwesend ( $\mathcal{B}(j) = 0$ ) sind.

Wir definieren:  $B =$  Der Patient zeigt die Belegung  $\mathcal{B}$ . Es gilt  $B = \bigcap_{j=1}^m U_j$ , wobei

$$U_j = \begin{cases} S_j & \text{falls } \mathcal{B}(j) = 1 \\ \bar{S}_j & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Satz von Bayes kann nun mit  $A_i = K_i$  angewendet werden, unter der Annahme, daß der Patient eine und genau eine der Krankheiten  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$  hat.

#### 4. Satz von Bayes

##### Satz 28 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  seien paarweise disjunkt, mit  $\Pr[A_j] > 0$  für alle  $j$ . Ferner sei  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  ein Ereignis mit  $\Pr[B] > 0$ . Dann gilt für ein beliebiges  $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  mit  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$



Im Spezialfall, in dem die Ereignisse  $S_1 \cap K_i, \dots, S_m \cap K_i$  unabhängig sind für alle  $1 \leq i \leq n$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Pr[B|K_i] \cdot \Pr[K_i] &= \Pr[B \cap K_i] \\
 &= \Pr\left[\left(\bigcap_{k=1}^m U_k\right) \cap K_i\right] \\
 &= \Pr\left[\bigcap_{k=1}^m (U_k \cap K_i)\right] \\
 &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \prod_{k=1}^m \Pr[U_k \cap K_i] \\
 &= \prod_{k=1}^m (\Pr[U_k|K_i] \cdot \Pr[K_i]) \\
 &= \Pr[K_i]^m \cdot \prod_{k=1}^m \Pr[U_k|K_i]
 \end{aligned}$$

Wir definieren:  $B =$  Der Patient zeigt die Belegung  $\mathcal{B}$ . Es gilt  $B = \bigcap_{j=1}^m U_j$ , wobei

$$U_j = \begin{cases} S_j & \text{falls } \mathcal{B}(j) = 1 \\ \bar{S}_j & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Satz von Bayes kann nun mit  $A_i = K_i$  angewendet werden, unter der Annahme, daß der Patient eine und genau eine der Krankheiten  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$  hat.

Im Spezialfall, in dem die Ereignisse  $S_1 \cap K_i, \dots, S_m \cap K_i$  unabhängig sind für alle  $1 \leq i \leq n$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Pr[B|K_i] \cdot \Pr[K_i] &= \Pr[B \cap K_i] \\
 &= \Pr\left[\left(\bigcap_{k=1}^m U_k\right) \cap K_i\right] \\
 &= \Pr\left[\bigcap_{k=1}^m (U_k \cap K_i)\right] \\
 &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \prod_{k=1}^m \Pr[U_k \cap K_i] \\
 &= \prod_{k=1}^m (\Pr[U_k|K_i] \cdot \Pr[K_i]) \\
 &= \Pr[K_i]^m \cdot \prod_{k=1}^m \Pr[U_k|K_i]
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen im Satz von Bayes:

$$\Pr[K_i|B] = \frac{\Pr[K_i]^m \cdot \prod_{k=1}^m \Pr[U_k|K_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[K_j]^m \cdot \prod_{k=1}^m \Pr[U_k|K_j]}$$

mit

$$\Pr[U_k|K_i] = \begin{cases} \Pr[S_k|K_i] & \text{falls } \mathcal{B}(k) = 1 \\ 1 - \Pr[S_k|K_i] & \text{sonst} \end{cases}$$

### Beispiel 29 (Diagnose von Hirntumoren)

Microscopic description: The H&E sections show a tumor with a predominately **papillary or filiform architecture** (Figures 2 and 3). The cells are arranged in a **pseudocolumnar fashion** forming **perivascular palisades** about a fibrovascular core. There is **marked nuclear pleomorphism** with many bizarre nuclei, and a **brisk mitotic rate** (Figure 4), the nucleoli are indistinct. In areas, the papillary configuration gives way to patternless sheets of cells interrupted by **zonal necrosis**. Focally, the tumor cells surround **microcavities** which are either optically empty or contain "wisps" of eosinophilic fibrillary material. **Confluent calcospherites** are focally prominent. **Vascular endothelial proliferation** is present. **Foci of glial frame** indicate invasiveness. **Rests of native plexus** are occasionally encountered.

### Beispiel 29 (Diagnose von Hirntumoren)

Microscopic description: The H&E sections show a tumor with a predominately **papillary or filiform architecture** (Figures 2 and 3). The cells are arranged in a **pseudocolumnar fashion** forming **perivascular palisades** about a fibrovascular core. There is **marked nuclear pleomorphism** with many bizarre nuclei, and a **brisk mitotic rate** (Figure 4), the nucleoli are indistinct. In areas, the papillary configuration gives way to patternless sheets of cells interrupted by **zonal necrosis**. Focally, the tumor cells surround **microcavities** which are either optically empty or contain "wisps" of eosinophilic fibrillary material. **Confluent calcospherites** are focally prominent. **Vascular endothelial proliferation** is present. **Foci of glial frame** indicate invasiveness. **Rests of native plexus** are occasionally encountered.

### Beispiel 0 (Forts.: *A priori* Wahrscheinlichkeiten)

Diagnose	Wahrscheinlichkeit
Grade I	0.25
Grade II	0.25
Grade III	0.20
Grade IV	0.30

### Beispiel 0 (Forts.: Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

		Gr. I	Gr. II	Gr. III	Gr. IV
Diffuse infiltration	DI	0.364	0.878	0.896	0.819
Necrosis	NE	0.221	0.246	0.716	0.850
Vascular abnormalities	VA	0.648	0.686	0.849	0.926
Vascular occlusions	VO	0.113	0.121	0.518	0.640
Nuclear polymorphism	NP	0.702	0.825	0.971	0.968
Cellular polymorphism	CP	0.362	0.706	0.801	0.833
Visible perycarion	VP	0.494	0.865	0.896	0.887
Typical mitoses	TM	0.121	0.109	0.726	0.853
Atypical mitoses	AM	0.005	0.029	0.556	0.733
Undifferentiated cells	UC	0.413	0.450	0.651	0.943

idf\* - PDF Annotator

2012-dwt.pdf\*

Beispiel 0 (Forts.: Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

	Gr. I	Gr. II	Gr. III	Gr. IV
- Diffuse infiltration	DI 0.364	0.878	0.896	0.819
- Necrosis	NE 0.221	0.246	0.716	0.850
- Vascular abnormalities	VA 0.648	0.686	0.849	0.926
Vascular occlusions	VO 0.113	0.121	0.518	0.640
Nuclear polymorphism	NP 0.702	0.825	0.971	0.968
Cellular polymorphism	CP 0.362	0.706	0.801	0.833
Visible perycarion	VP 0.494	0.865	0.896	0.887
Typical mitoses	TM 0.121	0.109	0.726	0.853
Atypical mitoses	AM 0.005	0.029	0.556	0.733
Undifferentiated cells	UC 0.413	0.450	0.651	0.943

Geändert

idf\* - PDF Annotator

2012-dwt.pdf\*

Beispiel 0 (Forts.: Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Brain Tumour Consultant \ fast & secure  
run it everywhere  
real time analysis

BTC (Brain Tumour Consultant) is a free platform to obtain a second opinion on histopathological diagnosis in brain tumours. It includes several applications to predict a "malignancy coefficient", to establish differential diagnosis and to estimate patient survival time.

BTC is also a repository of data completely anonymized where "user-collaborators" may have access to compare their cases with the data of other series or cases with similar or different treatment strategies, biopathological features etc.

Geändert

Brain Tumour Consultant - Mozilla Firefox

Grado Application | Brain Tumour Co... | iGoogle

2dzanga.com/btc/index.php?r=grado/about

# Brain Tumour Consultant

HOME APPLICATIONS ACCOUNT HELP

GRADO MEDES DSI

## About Grado

Tumoral grading (WHO-classification) is a very important aspect for diagnosis since treatment and outcomes of cases greatly depend on it. However, it is difficult to establish a precise grading because well delimited boundaries between malignancy degrees do not exist and thus the final decision remains subjective.

We present an online protocol for grading brain tumours. It offers great objectivity and has already permitted the analysis on a big amount of brain tumours which characteristics change and how they change among malignancy degree.

Circa one thousand five hundred brain tumours were used as a database. On paraffin sections histological and immunohistochemical studies were performed. When a histological characteristic was present the observer indicated its degree: low, middle or high (1, 2, 3). No present or not detected = 0. Discriminant functions, regression analysis and neuronal networks were used to decide which of the 50 characteristics we studied is related to malignancy.

Following characteristics indicating malignancy were used: Diffuse infiltration, Necrosis, Vascular abnormalities, Vascular thrombosis, Nuclear polymorphism, Cellular polymorphism, Cytoplasm size, Typical mitoses, Atypical mitoses and Undifferentiated cells. More than ten thousand brain tumors validated GRADO-IGL until January 2009. More of 95% of the tested tumours are correctly classified.

APPLICATION MENU

- About Grado
- Grado Application
- Grado Help

Geändert

Brain Tumour Consultant - Mozilla Firefox

Grado Application | Brain Tumour Co... | iGoogle

2dzanga.com/btc/index.php?r=grado/main

GRADO MEDES DSI

## Grado

APPLICATION MENU

- About Grado
- Grado Application
- Grado Help

Diffuse infiltration	0	1	2	3
Necrosis	0	1	2	3
Vascular abnormalities	0	1	2	3
Vascular occlusions	0	1	2	3
Cellular polymorphism	0	1	2	3
Pericaryon size	0	1	2	3
Nuclear polymorphism	0	1	2	3
Typical mitoses	0	1	2	3
Atypical mitoses	0	1	2	3
Undifferentiated cells	0	1	2	3

Evaluate

Geändert

Brain Tumour Consultant - Mozilla Firefox

Grado Application | Brain Tumour Co... x iGoogle

2dzanga.com/btc/index.php?r=grado/main

Grado

APPLICATION MENU

- About Grado
- Grado Application
- Grado Help

Diffuse infiltration 0 1 2 3

Necrosis 0 1 2 3

Vascular abnormalities 0 1 2 3

Vascular occlusions 0 1 2 3

Cellular polymorphism 0 1 2 3

Pericaryon size 0 1 2 3

Nuclear polymorphism 0 1 2 3

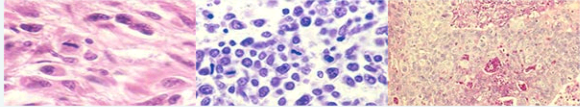
Typical mitoses 0 1 2 3

Atypical mitoses 0 1 2 3

Undifferentiated cells 0 1 2 3

Evaluate

**Typical mitoses**



1 2 3

Typical mitoses: Quantity of the normal figures of mitotic divisions of the tumor cells or number of positive cells studied with KI-67 (labelling indices Red).

Ok

DE 14:58 03.05.2012

Brain Tumour Consultant - Mozilla Firefox

Grado Application | Brain Tumour Co... x iGoogle

2dzanga.com/btc/index.php?r=grado/main

Grado

APPLICATION MENU

- About Grado
- Grado Application
- Grado Help

Diffuse infiltration 0 1 2 3

Necrosis 0 1 2 3

Vascular abnormalities 0 1 2 3

Vascular occlusions 0 1 2 3

Cellular polymorphism 0 1 2 3

Pericaryon size 0 1 2 3

Nuclear polymorphism 0 1 2 3

Typical mitoses 0 1 2 3

Atypical mitoses 0 1 2 3

Undifferentiated cells 0 1 2 3

Evaluate

DE 14:58 03.05.2012

Brain Tumour Consultant - Mozilla Firefox

Grado Application | Brain Tumour Co... x iGoogle

2dzanga.com/btc/index.php?r=grado/main

Usuario de Prueba (logout)

Brain Tumour Consultant

HOME APPLICATIONS ACCOUNT HELP

GRADO MEDES DSI

Grado

APPLICATION MENU

- About Grado
- Grado Application
- Grado Help

**Malignancy Coefficient**

1.82

Grade I 39.90%

Grade II 41.32%

Grade III 16.08%

Grade IV 2.70%

Evaluate again

DE 14:58 03.05.2012

Brain Tumour Consultant - Mozilla Firefox

Medes Application | Brain Tumour Co... x iGoogle

2dzanga.com/btc/index.php?r=medes/diagnoses

Usuario de Prueba (logout)

Brain Tumour Consultant

HOME APPLICATIONS ACCOUNT HELP

GRADO MEDES DSI

Diagnosis Profiles

Here is a list containing all the diagnose profiles available for the public domain on Brain Tumour Consultant. The profiles are distinguished into two groups, public and personal, where personal refers to your designed profiles. Click once to get brief information about the profile, double-click to load it.

APPLICATION MENU

- About Medes
- Medes Application
- Diagnoses
- Design a diagnosis
- Medes Help

Public Profiles Personal Profiles

- Neurology
- Neuropathology
- Neuroradiology
- General Pathology

Quick information

Click in any of the profiles in the left to get information, edit or load them.

DE 14:58 03.05.2012

Brain Tumour Consultant

HOME APPLICATIONS ACCOUNT HELP

GRADO MEDES DSI

### Diagnosis Profiles

Here is a list containing all the diagnose profiles available for the public domain on Brain Tumour Consultant. The profiles are distinguished into two groups, public and personal, where personal refers to your designed profiles. Click once to get brief information about the profile, double-click to load it.

Public Profiles Personal Profiles

- Neurology
- Neuropathology
- Neuroradiology
- General Pathology

Quick information

Click in any of the profiles in the left to get information, edit or load them.

APPLICATION MENU

- About Medes
- Medes Application
  - Diagnoses
  - Design a diagnosis
- Medes Help

© Universidad del País Vasco LaNCE research group 2dzanga About Contact Us Terms of Use Privacy Policy © Brain Tumour Consultant, 2011

Survival of Malignant Astrocytomas

Feature nº 1 of 15

Glial filaments: Unknown

Start again Next symptom

Survival 0-1 years	37.93%
Survival >1-1.5 years	17.24%
Survival >1.5-2.5 years	18.97%
Survival > 2.5 years	25.86%

APPLICATION MENU

- About Medes
- Medes Application
  - Diagnoses
  - Design a diagnosis
- Medes Help

Survival of Malignant Astrocytomas

- Diagnosis Information
- Diagnosis Wizard
- Diagnosis Help

© Universidad del País Vasco LaNCE research group 2dzanga About Contact Us Terms of Use Privacy Policy © Brain Tumour Consultant, 2011

Survival of Malignant Astrocytomas

Feature nº 2 of 15

Age: Unknown

Start again Next symptom

Survival 0-1 years	37.93%
Survival >1-1.5 years	17.24%
Survival >1.5-2.5 years	18.97%
Survival > 2.5 years	25.86%

APPLICATION MENU

- About Medes
- Medes Application
  - Diagnoses
  - Design a diagnosis
- Medes Help

Survival of Malignant Astrocytomas

- Diagnosis Information
- Diagnosis Wizard
- Diagnosis Help

© Universidad del País Vasco LaNCE research group 2dzanga About Contact Us Terms of Use Privacy Policy © Brain Tumour Consultant, 2011

Survival of Malignant Astrocytomas

Feature nº 4 of 15

Malignace coef.: Range: 0.62 to 4.19

Start again Next symptom

Survival 0-1 years	63.50%
Survival >1-1.5 years	15.61%
Survival >1.5-2.5 years	0.03%
Survival > 2.5 years	20.86%

APPLICATION MENU

- About Medes
- Medes Application
  - Diagnoses
  - Design a diagnosis
- Medes Help

Survival of Malignant Astrocytomas

- Diagnosis Information
- Diagnosis Wizard
- Diagnosis Help

© Universidad del País Vasco LaNCE research group 2dzanga About Contact Us Terms of Use Privacy Policy © Brain Tumour Consultant, 2011



## 5. Zufallsvariablen

### 5.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an „Auswirkungen“ oder „Merkmalen“ der (Elementar)Ereignisse interessiert.

#### Definition 1

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge  $\Omega$  gegeben. Eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable  $X$  über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge  $\Omega$  heißt **diskret**.

Bei diskreten Zufallsvariablen ist der **Wertebereich**

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}; \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ebenfalls wieder endlich (bzw. abzählbar unendlich).

#### Beispiel 2

Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Als Ergebnismenge erhalten wir  $\Omega := \{H, T\}^3$ . Die Zufallsvariable  $Y$  bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Head“.

Beispielsweise gilt also  $Y(HTH) = 2$  und  $Y(HHH) = 3$ .  $Y$  hat den Wertebereich  $W_Y = \{0, 1, 2, 3\}$ .

Für  $W_X = \{x_1, \dots, x_n\}$  bzw.  $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$  betrachten wir (für ein beliebiges  $1 \leq i \leq n$  bzw.  $x_i \in \mathbb{N}$ ) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

**Bemerkung:** Anstelle von  $\Pr[X^{-1}(x_i)]$  verwendet man häufig auch die Schreibweise  $\Pr[„X = x_i“]$ . Analog setzt man

$$\begin{aligned} \Pr[„X \leq x_i“] &= \sum_{x \in W_X : x \leq x_i} \Pr[„X = x“] \\ &= \Pr[\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_i\}]. \end{aligned}$$

Oft lässt man auch die Anführungszeichen weg.

### Definition 3

- Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0, 1] \quad (4)$$

nennt man (**diskrete**) **Dichte(funktion)** der Zufallsvariablen  $X$ .

- Die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x \in W_X : x' \leq x} \Pr[X = x'] \in [0, 1] \quad (5)$$

heißt **Verteilung(sfunktion)** der Zufallsvariablen  $X$ .

### Beispiel 4

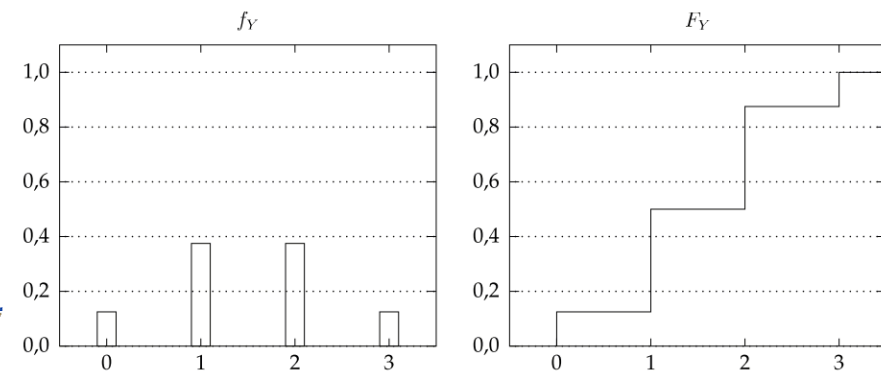
Für die Zufallsvariable  $Y$  erhalten wir

$$\Pr[Y = 0] = \Pr[TTT] = \frac{1}{8},$$

$$\Pr[Y = 1] = \Pr[H TT] + \Pr[T HT] + \Pr[T TH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 2] = \Pr[H HT] + \Pr[H TH] + \Pr[T HH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 3] = \Pr[HHH] = \frac{1}{8}.$$



Dichte und Verteilung von  $Y$

**Bemerkung:** Man kann statt  $\Omega$  auch den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum über  $W_X$  betrachten.

### Beispiel 4

Für die Zufallsvariable  $Y$  erhalten wir

$$\Pr[Y = 0] = \Pr[TTT] = \frac{1}{8},$$

$$\Pr[Y = 1] = \Pr[HTT] + \Pr[THT] + \Pr[TTH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 2] = \Pr[HHT] + \Pr[HTH] + \Pr[THH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 3] = \Pr[HHH] = \frac{1}{8}.$$

## 5.2 Erwartungswert und Varianz

### Definition 5

Zu einer Zufallsvariablen  $X$  definieren wir den Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$  durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern  $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$  konvergiert.

### Beispiel 6

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

## 5.2 Erwartungswert und Varianz

### Definition 5

Zu einer Zufallsvariablen  $X$  definieren wir den Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$  durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern  $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$  konvergiert.

### Beispiel 6

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

## 5.2 Erwartungswert und Varianz

### Definition 5

Zu einer Zufallsvariablen  $X$  definieren wir den **Erwartungswert**  $\mathbb{E}[X]$  durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern  $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$  konvergiert.

### Beispiel 6

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

### Beispiel 7

Eine Münze wird so lange geworfen, bis sie zum ersten Mal „Head“ zeigt. Sei  $k$  die Anzahl der durchgeführten Würfe. Wenn  $k$  ungerade ist, zahlt der Spieler an die Bank  $k$  Euro. Andernfalls ( $k$  gerade) zahlt die Bank  $k$  Euro an den Spieler.

$$G := \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wie schon gesehen, gilt dann

$$\Pr[\text{„Anzahl Würfe} = k\text{“}] = (1/2)^k.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}[G] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

existiert der Erwartungswert  $\mathbb{E}[G]$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G] &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (2j-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} - 2j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \cdot [(2j-1) - j] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{j-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

existiert der Erwartungswert  $\mathbb{E}[G]$ .

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G] &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (2j-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} - 2j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \cdot [(2j-1) - j] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{j-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Wird jedoch, um das Risiko zu steigern, der zu zahlende Betrag von  $k$  Euro jeweils auf  $2^k$  Euro erhöht, also

$$G' := \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -2^k & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

dann existiert  $\mathbb{E}[G']$  nicht, da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G'] &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = +1 - 1 + 1 - 1 + \dots\end{aligned}$$

Wird jedoch, um das Risiko zu steigern, der zu zahlende Betrag von  $k$  Euro jeweils auf  $2^k$  Euro erhöht, also

$$G' := \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -2^k & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

dann existiert  $\mathbb{E}[G']$  nicht, da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G'] &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = +1 - 1 + 1 - 1 + \dots\end{aligned}$$

Wird jedoch, um das Risiko zu steigern, der zu zahlende Betrag von  $k$  Euro jeweils auf  $2^k$  Euro erhöht, also

$$G' := \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -2^k & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

dann existiert  $\mathbb{E}[G']$  nicht, da

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G'] &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = \underline{+1} - \underline{1} + \underline{+1} - \underline{1} + \dots \end{aligned}$$

### Berechnung des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \\ &= \sum_{x \in W_X} x \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} \Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]. \end{aligned}$$

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen ist dabei analog zur Definition des Erwartungswerts erforderlich, dass  $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \Pr[\omega]$  konvergiert (**absolute** Konvergenz).

### Satz 8 (Monotonie des Erwartungswerts)

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega$  mit  $X(\omega) \leq Y(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Dann gilt  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ .

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \Pr[\omega] = \mathbb{E}[Y].$$

□

Aus Satz 8 folgt insbesondere, dass  $a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$  gilt, wenn für die Zufallsvariable  $X$  die Eigenschaft  $a \leq X(\omega) \leq b$  für alle  $\omega \in \Omega$  erfüllt ist.

Aus

$$\Pr[Y = y] = \Pr[\{\omega \mid f(X(\omega)) = y\}] = \sum_{x: f(x)=y} \Pr[X = x]$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{y \in W_Y} y \cdot \sum_{x: f(x)=y} \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} f(x) \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \cdot \Pr[\omega]. \end{aligned}$$

### Satz 9 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[a \cdot X + b] &= \sum_{x \in W_X} (a \cdot x + b) \cdot \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] + b \cdot \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \mathbb{E}[X] + b. \end{aligned}$$

□