Script generated by TTT

Title: Esparza: DWT (12.06.2012)

Date: Tue Jun 12 14:51:15 CEST 2012

Duration: 56:40 min

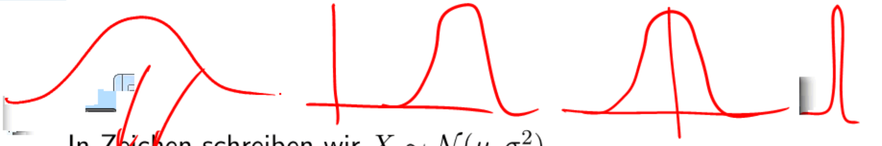
Pages: 28

In Zeichen schreiben wir $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
$\mathcal{N}(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x;0,1)$ kürzen wir durch $\varphi(x)$ ab.

Die Verteilungsfunktion zu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt =: \Phi(x;\mu,\sigma)\,.$$

Diese Funktion heißt Gauß'sche Φ-Funktion (φ ist nicht geschlossen integrierbar).

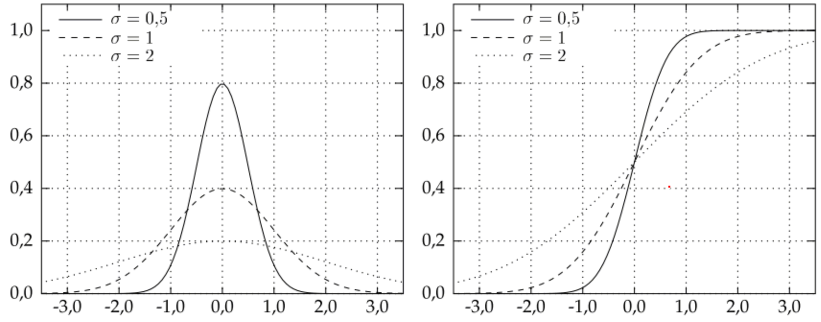


In Zeichen schreiben wir $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
$\mathcal{N}(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x;0,1)$ kürzen wir durch $\varphi(x)$ ab.

Die Verteilungsfunktion zu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt =: \Phi(x;\mu,\sigma)\,.$$

Diese Funktion heißt Gauß'sche Φ-Funktion (φ ist nicht geschlossen integrierbar).



Dichte und Verteilung von $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

2.1 Erwartungswert und Varianz

Wir berechnen zunächst Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, d.h., wir betrachten den Spezialfall $\mu = 0, \sigma = 1$ (Satz 71). Dann berechnen wir Erwartungswert und Varianz für beliebige Werte der Parameter μ und σ. . .

2.1.1 Der Fall $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

Lemma 70

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Beweis:

Wir berechnen zunächst I^2:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, \mathrm{d}y\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Beweis (Forts.):

Wir gehen nun zu Polarkoordinaten über und setzen $x := r\cos\phi$ und $y := r\sin\phi$. Dann ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

und wir erhalten

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\phi \;=\; \int_0^{2\pi}\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} \mathrm{d}\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}\phi \;=\; 2\pi.$$

□

Satz 71

X sei $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = 0 \text{ und } \quad \mathrm{Var}[X] = 1.$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

Da der Integrand punktsymmetrisch zu $(0,0)$ ist, folgt $\mathbb{E}[X] = 0$.

Beweis (Forts.):

Mittels Lemma 70 und durch partielle Integration erhalten wir

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \underbrace{x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{E}[X^2] = 1$ ist und somit $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1$. □

2.1.2 Der allgemeine Fall

Lemma 72 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\Pr[Y \le y] = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}u.$$

2.1.2 Der allgemeine Fall

$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$
$\mathcal{N}(0, 1)$

Lemma 72 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\Pr[Y \le y] = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}u.$$

Beweis (Forts.):

Nach der Substitution $u = (v-b)/a$ und $\mathrm{d}\,u = (1/a) \cdot \mathrm{d}\,v$ erhalten wir

$$\Pr[Y \le y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(v - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \mathrm{d}v\,.$$

Also $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Für $a < 0$ verläuft der Beweis analog. □

$\mathcal{N}(\mu, \cancel{\sigma}^2)$ σ σ^2

$\mathcal{N}(0,1)$

2.1.2 Der allgemeine Fall

Lemma 72 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

$a < 0$

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\Pr[Y \le y] = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}u.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) \cdot g(x))' = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g'(x)$$

Beweis (Forts.):

Mittels Lemma 70 und durch partielle Integration erhalten wir

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \underbrace{x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$

$\mathbb{E}[x^2]$

Daraus folgt, dass $\mathbb{E}[X^2] = 1$ ist und somit $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1$. □

$f'(x)\, g(x)$ $f(x)\, g'(x)$

e^x

$f(x) \cdot g(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}$

Beweis (Forts.):

Nach der Substitution $u = (v - b)/a$ und $\mathrm{d}\,u = (1/a) \cdot \mathrm{d}\,v$ erhalten wir

$$\Pr[Y \le y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(v - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \mathrm{d}v\,.$$

Also $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Für $a < 0$ verläuft der Beweis analog. □

$\mathcal{N}(\mu, \cancel{\sigma}^2)$ σ σ^2

$\mathcal{N}(0,1)$

2.1.2 Der allgemeine Fall

Lemma 72 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

$a < 0$

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\Pr[Y \le y] = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}u.$$

$$\Pr[Y \le y] = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a\sigma}\, e^{-\frac{(x-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}\, dy$$

Sei also X eine beliebige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable X und $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Dann gilt nach Lemma 72 $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Y heißt auch normiert.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\Pr[a < X \le b] &= \Pr\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

2.1.2 Der allgemeine Fall

$\mathcal{N}(\mu, \cancel{\sigma^2})$ $\quad \sigma \quad \sigma^2$

$\mathcal{N}(0,1)$

Lemma 72 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

$a < 0$

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\begin{aligned}\Pr[Y \le y] = \Pr[aX + b \le y] &= \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du.\end{aligned}$$

$$\Pr[Y \le y] = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a\sigma} e^{-\frac{(x-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}} dy$$

Satz 73

X sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \sigma^2.$$

Beweis:

Nach Lemma 72 ist $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt. Ferner gilt gemäß der Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Y + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[Y] + \mu = \mu$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\sigma Y + \mu] = \sigma^2 \cdot \mathrm{Var}[Y] = \sigma^2.$$

□

Satz 73

X sei $\boxed{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$-verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \sigma^2.$$

"$\mathbb{E}[Y] = 0 \quad \mathrm{Var}(Y) = 1$

Beweis:

Nach Lemma 72 ist $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt. Ferner gilt gemäß der Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Y + \mu] = \sigma \cdot \overset{=0}{\mathbb{E}[Y]} + \mu = \mu$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\sigma Y + \cancel{\mu}] = \sigma^2 \cdot \underset{=1}{\mathrm{Var}[Y]} = \sigma^2.$$

□

Die folgende Aussage ist eine Konsequenz von Satz 74:

Korollar 75

Sei $H_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ *eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von* H_n/n *konvergiert gegen* $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$ *für* $n \to \infty$.

2.2 Die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Satz 74 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, \ldots, X_n$ *seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit* p. *Dann gilt für die Zufallsvariable* H_n *mit*

$$H_n := X_1 + \ldots + X_n$$

für $n \geq 1$, *dass die Verteilung der Zufallsvariablen*

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ *gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.*

Der Satz wird später als Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes bewiesen. (Satz 80 und Korollar 82).

2.2 Die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Satz 74 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, \ldots, X_n$ *seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit* p. *Dann gilt für die Zufallsvariable* H_n *mit*

$$H_n := X_1 + \ldots + X_n$$

für $n \geq 1$, *dass die Verteilung der Zufallsvariablen*

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

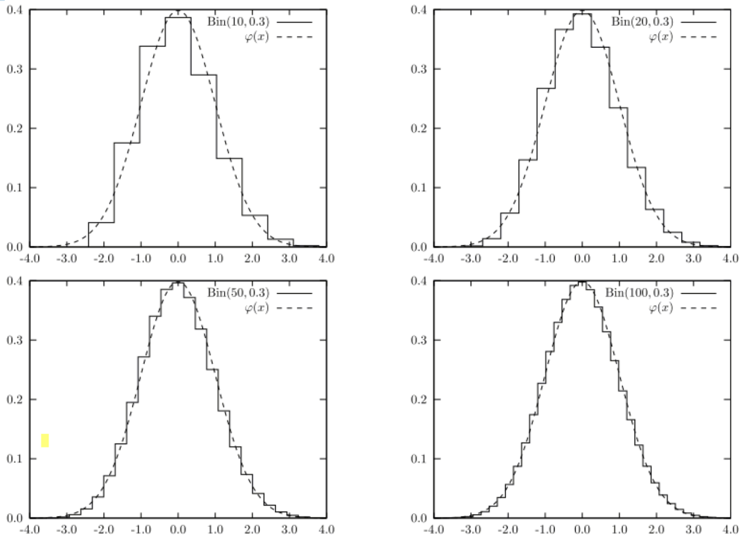
für $n \to \infty$ *gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.*

Der Satz wird später als Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes bewiesen. (Satz 80 und Korollar 82).

Die folgende Aussage ist eine Konsequenz von Satz 74:

Korollar 75

Sei $H_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ *eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von* H_n/n *konvergiert gegen* $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$ *für* $n \to \infty$.



Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

$\mathrm{Bin}(n, 0.3)$ bei $0.3n$ zentriert, mit $\sqrt{0.3 \cdot 0.7n}$ horizontal gestaucht und vertikal gestreckt

Beispiel 76

25.05.2012, ZDF: Die Umfragen zu diesem Politbarometer wurden wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 22. bis 24. Mai 2012 bei 1312 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von zehn Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte. Daten zur politischen Stimmung: CDU/CSU: 38 Prozent, SPD: 34 Prozent, FDP: zwei Prozent, Linke: vier Prozent, Grüne: 14 Prozent, Piraten: sechs Prozent.

Wie werden diese Fehlerbereiche berechnet?

Die folgende Aussage ist eine Konsequenz von Satz 74:

Korollar 75

Sei $H_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von H_n/n konvergiert gegen $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$ für $n \to \infty$.

Beispiel 76

25.05.2012, ZDF: Die Umfragen zu diesem Politbarometer wurden wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 22. bis 24. Mai 2012 bei 1312 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 Prozent rund +/- drei Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von zehn Prozent rund +/- zwei Prozentpunkte. Daten zur politischen Stimmung: CDU/CSU: 38 Prozent, SPD: 34 Prozent, FDP: zwei Prozent, Linke: vier Prozent, Grüne: 14 Prozent, Piraten: sechs Prozent.

Wie werden diese Fehlerbereiche berechnet?