Script generated by TTT

Title: Meixner: test2 (13.12.2012)

Date: Thu Dec 13 10:35:02 CET 2012

Duration: 75:49 min

Pages: 16

WS 2012/13

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/

Wintersemester 2012

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R\\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \qquad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ für } k > r\,.$$

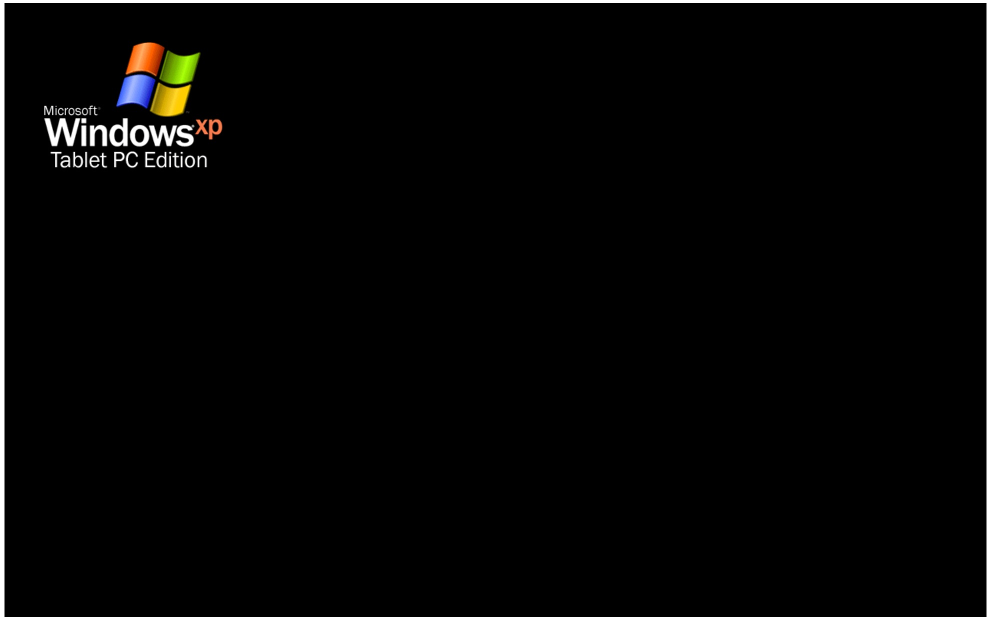
Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R\\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \qquad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ für } k > r\,.$$



Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$
\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \qquad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ für } k > r\,.
\end{aligned}
$$

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ($n = r$)
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \to R$ ist

$$
\begin{aligned}
&= r^n = \sum_{A \subseteq R} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \#\text{ der surjektiven Abbildungen } N \to A \\
&= \sum_{k=0}^{r} \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \qquad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ für } k > r\,.
\end{aligned}
$$

Diskrete Strukturen
©Ernst W. Mayr
4.4 Anzahl von Abbildungen
277/303

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ($n = r$)
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ($n = r$)
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

4.6 Abzählen von Permutationen

4.6.1 Stirling-Zahlen der ersten Art

Definition 172

Die Stirling-Zahl der ersten Art

$$s_{n,k}$$

gibt die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Zyklen an.

Einfache Beobachtungen:

2. $$s_{n,1} = (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

3. $$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

4. $$s_{n,n} = 1$$

5. $$s_{n,k} = 0 \text{ für } k > n \geq 0$$

Man setzt weiterhin:

$$s_{0,0} := 1 \quad s_{n,0} := 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad s_{n,k} = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, k < 0.$$

4.6.2 Typ einer Permutation

Definition 173

Sei π eine Permutation von n Objekten, $b_i(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π der Länge i $(i = 1, \ldots, n)$ und $b(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π, also

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i(\pi) = n \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi) = b(\pi).$$

Dann heißt der formale Ausdruck

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} 3^{b_3(\pi)} \ldots n^{b_n(\pi)}$$

der Typ von π (Potenzen mit Exponent 0 werden gewöhnlich nicht geschrieben).

4.6.2 Typ einer Permutation

Definition 173

Sei π eine Permutation von n Objekten, $b_i(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π der Länge i $(i = 1, \ldots, n)$ und $b(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π, also

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot b_i(\pi) = n \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi) = b(\pi).$$

Dann heißt der formale Ausdruck

$$1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} 3^{b_3(\pi)} \ldots n^{b_n(\pi)}$$

der Typ von π (Potenzen mit Exponent 0 werden gewöhnlich nicht geschrieben).

Beispiel 174

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\textit{als Funktionswerte}}{(4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 1\ 8\ 3)}$$

$$= \underset{\textit{in Zyklenschreibweise}}{(1\ 4\ 2\ 5\ 7\ 8\ 3\ 6)}$$

Typ: 8^1

Beispiel 178

$$s_{5,1} = \frac{5!}{1! \cdot 5^1} = 4! = 24$$

$$s_{5,2} = \sum_{\text{Typ}=1^1 4^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=2^1 3^1} 1 = \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1^1 \cdot 4^1} + \frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 3^1} = 50$$

$$s_{5,3} = \sum_{\text{Typ}=1^2 3^1} 1 + \sum_{\text{Typ}=1^1 2^2} 1 = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1^2 \cdot 3^1} + \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1^1 \cdot 2^2} = 35$$

Beispiel 175

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (2\ 4\ 7\ 1\ 6\ 5\ 3\ 8)$$

$$= (1\ 2\ 4)\ (3\ 7)\ (5\ 6)\ (8)$$

Typ: $1^1\ 2^2\ 3^1$