

Title: Mayr: 2012 ds (10.01.2013)

Date: Thu Jan 10 10:15:38 CET 2013

Duration: 91:29 min

Pages: 35

Diskrete Strukturen

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/>

Wintersemester 2012

Beispiel (Forts.)

Also:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k^m &= \left(\sum_{x=0}^{n+1} x^m \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\
 &= \left(\sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot x^k \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot \left(\sum_{x=0}^{n+1} x^k \right) \\
 &= \sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_{x=0}^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{S_{m,k}}{k+1} (n+1)^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich ein Polynom in n vom Grad $m+1$.

Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^m S_{m,k} \cdot x^k,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 277) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.



Lemma 211 (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f) .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \\
&\quad - \underbrace{f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) .
\end{aligned}$$

□



Bemerkung zur Notation:

Bei der Darstellung

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f)$$

ist zu beachten, dass die diskrete Stammfunktion nur bis auf additive Konstanten bestimmt ist, links und rechts also eigentlich Klassen von Funktionen stehen (wie bei den Landau-Symbolen).



Beispiel 212

Berechne

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta \binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\
&= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m} .
\end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:



Beispiel (Forts.)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m} \Big|_{x=1}^{n+1} \\
&= \frac{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&= \frac{1}{m+1} \left(\frac{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{m+1} \right) \\
&= \frac{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0 .
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\ &\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0. \end{aligned}$$



Lemma 213 (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n . Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(0) \binom{x}{k}.$$

Bemerkung: Die Newton-Darstellung entspricht offensichtlich der Taylorreihenentwicklung im differenzierbaren Fall.



Beweis:

$f(x)$ kann als Polynom vom Grad n eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k$$

geschrieben werden (x^k ist Basis!). Damit ist nach Lemma 203 (1)

$$\Delta^l f(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot k^l \cdot x^{k-l}.$$

Also gilt, dass

$$\Delta^l f(0) = b_l \cdot l! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}.$$



Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^n S_{n,i} \cdot x^{\underline{i}}.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} k! \cdot S_{n,k} &= \Delta^k x^n \Big|_{x=0} = (E - I)^k x^n \Big|_{x=0} \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i \right) x^n \Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n, \end{aligned}$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n.$$



Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^n S_{n,i} \cdot x^i.$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} k! \cdot S_{n,k} &= \Delta^k x^n \Big|_{x=0} = (E - I)^k x^n \Big|_{x=0} \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i \right) x^n \Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n, \end{aligned}$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n.$$



4.9 Inversion

4.9.1 Basisfolgen

Definition 215

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \dots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt **Basisfolge**, falls

$$\deg(p_i) = i \quad \text{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, da wir für $p(x) \equiv 0$ festlegen: $\deg(p) = -1$.



4.9 Inversion

4.9.1 Basisfolgen

Definition 215

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \dots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt **Basisfolge**, falls

$$\deg(p_i) = i \quad \text{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, da wir für $p(x) \equiv 0$ festlegen: $\deg(p) = -1$.



Beobachtung: $(p_i(x))_{i \geq 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. □





4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $(p_i(x))_{i \geq 0}$ und $(q_i(x))_{i \geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten **Zusammenhangskoeffizienten**), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:



4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $(p_i(x))_{i \geq 0}$ und $(q_i(x))_{i \geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten **Zusammenhangskoeffizienten**), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \cdot q_k(x)$$



Lemma 216

Seien die $a_{n,k}, b_{n,k}$ wie oben, $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$, dann ist

$$AB = I$$

(I ist die $n + 1$ -dimensionale Einheitsmatrix.)

Beweis:

Klar. □



Satz 217

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}, n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden **Zusammenhangskoeffizienten**. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Beweis:

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = (v_0, \dots, v_n)^T = A \cdot u \text{ und } u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$. □





4.9.3 Die Binomialinversion

Der Binomialsatz ergibt:

$$x^n = ((x-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (x-1)^k$$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot x^k$$



Betrachte die beiden Basisfolgen

$$(v_k)_{k \geq 0} := (x^k)_{k \geq 0} \text{ und } (u_k)_{k \geq 0} := ((x-1)^k)_{k \geq 0}.$$

Satz 217 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u_k \right] \text{ und } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k \right]$$

Für „Puristen“: Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot u_k \right] \text{ und}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot v_k \right]$$



Beispiel 218

Sei $d(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n, 0).$$

(Die Anzahl der sog. **derangements**).

$$n! = \sum_{k=0}^n d(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \stackrel{k \mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$



Beispiel 218

Sei $d(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n, 0).$$

(Die Anzahl der sog. **derangements**).

$$n! = \sum_{k=0}^n d(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \stackrel{k \mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \frac{n!}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e}.$$

Beispiel 218

Sei $d(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n, 0).$$

(Die Anzahl der sog. **derangements**).

$$n! = \sum_{k=0}^n d(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \stackrel{k \mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \frac{n!}{n!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e}.$$

Beispiel 218

Sei $d(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n, 0).$$

(Die Anzahl der sog. **derangements**).

$$n! = \sum_{k=0}^n d(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \stackrel{k \mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$





4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n \geq 0}$ und $(x^n)_{n \geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot x^k$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die Stirling-Inversion ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$



4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n \geq 0}$ und $(x^n)_{n \geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot x^k$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die Stirling-Inversion ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot u_k \right] \text{ gdw } (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$



4.10 Erzeugende Funktionen

Definition 219

Zu einer Folge $(a_i)_{i \geq 0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i .$$



4.10 Erzeugende Funktionen

Definition 219

Zu einer Folge $(a_i)_{i \geq 0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i .$$





Beobachtungen: Die formalen Potenzreihen bilden einen Ring:

$$A(z) \pm B(z) = \sum_{i \geq 0} (a_i \pm b_i) z^i$$

$$c \cdot A(z) = \sum_{i \geq 0} (c \cdot a_i) z^i$$

Hier gilt folgende Produktformel:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot z^n$$

(Konvolution von $A(z)$ und $B(z)$)



Satz 220

Eine formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$$

besitzt ein **multiplikatives Inverses** genau dann, wenn $a_0 \neq 0$.

Beweis:

Annahme: Sei

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$$

ein solches Inverses. Dann muss $A(z) \cdot B(z) = 1$ sein, also auch $a_0 \cdot b_0 = 1$, damit $a_0 \neq 0$. Daher muss $b_0 = a_0^{-1}$ sein.



Beweis (Forts.):

Seien induktiv b_0, b_1, \dots, b_{n-1} bereits bestimmt. Dann folgt aus

$$[z^n](A(z) \cdot B(z)) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = 0, n \geq 1$$

(dabei bezeichnet $[z^n](\dots)$ den Koeffizienten von z^n in (\dots)) folgende Formel:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_{n-k}$$

Also ist b_n und damit per Induktion $B(z)$ eindeutig bestimmt. \square



Beispiel 221

Geometrische Reihe:

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Es gilt $A(z) \cdot (1 - z) = 1$, da

$$A(z) \cdot (1 - z) = A(z) - z \cdot A(z)$$

$$= (1 + z + z^2 + \dots) - (z + z^2 + z^3 + \dots) = 1$$

Also:

$$\dots A(z) = \frac{1}{1 - z} \dots$$