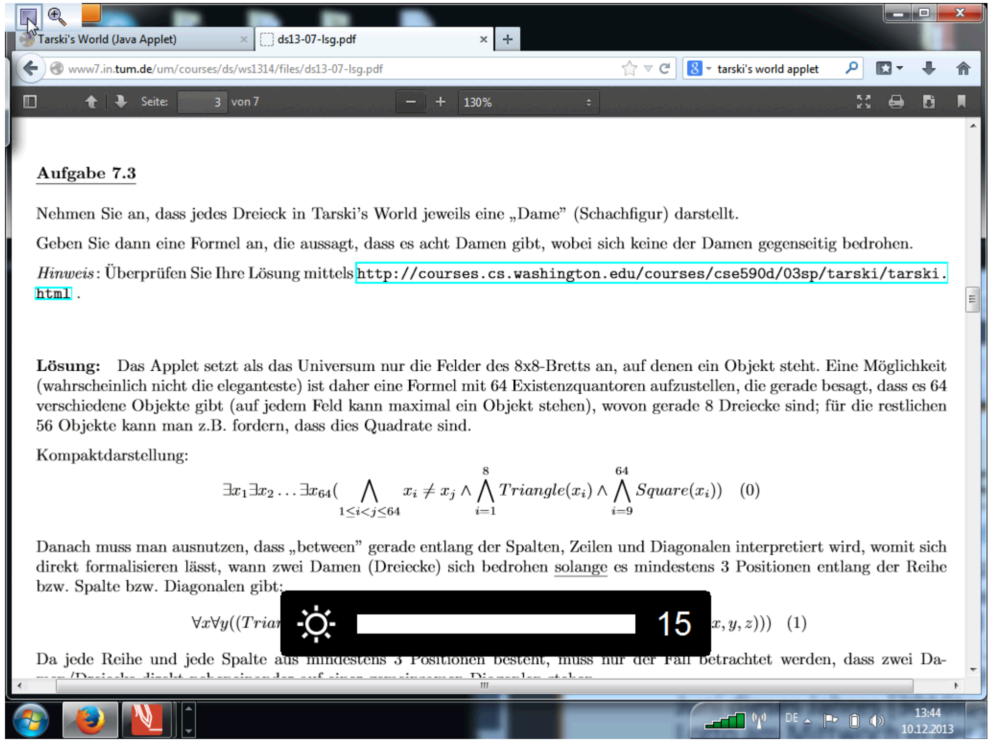
Script **generated by TTT**

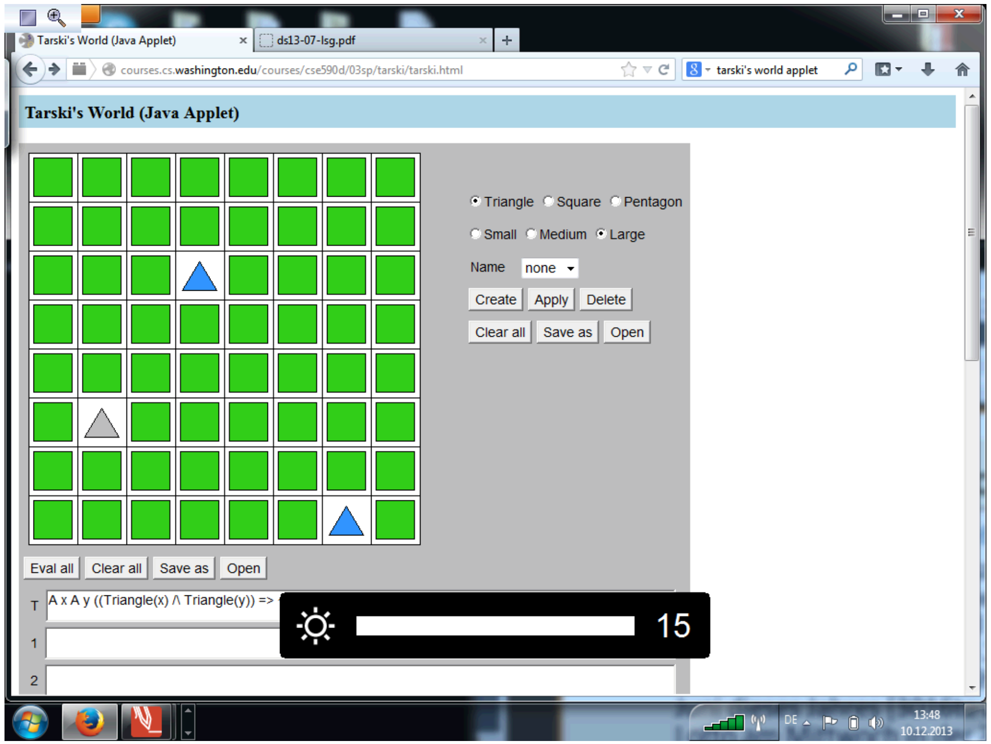
Title: Esparza: Diskrete Strukturen (10.12.2013)

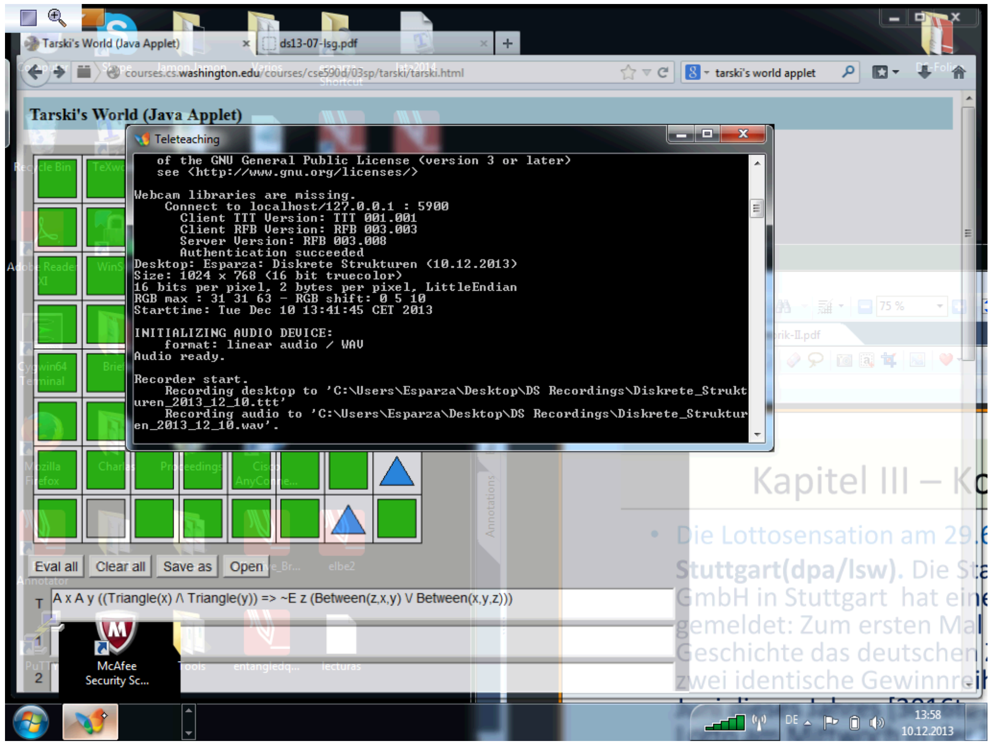
Date: Tue Dec 10 13:44:56 CET 2013

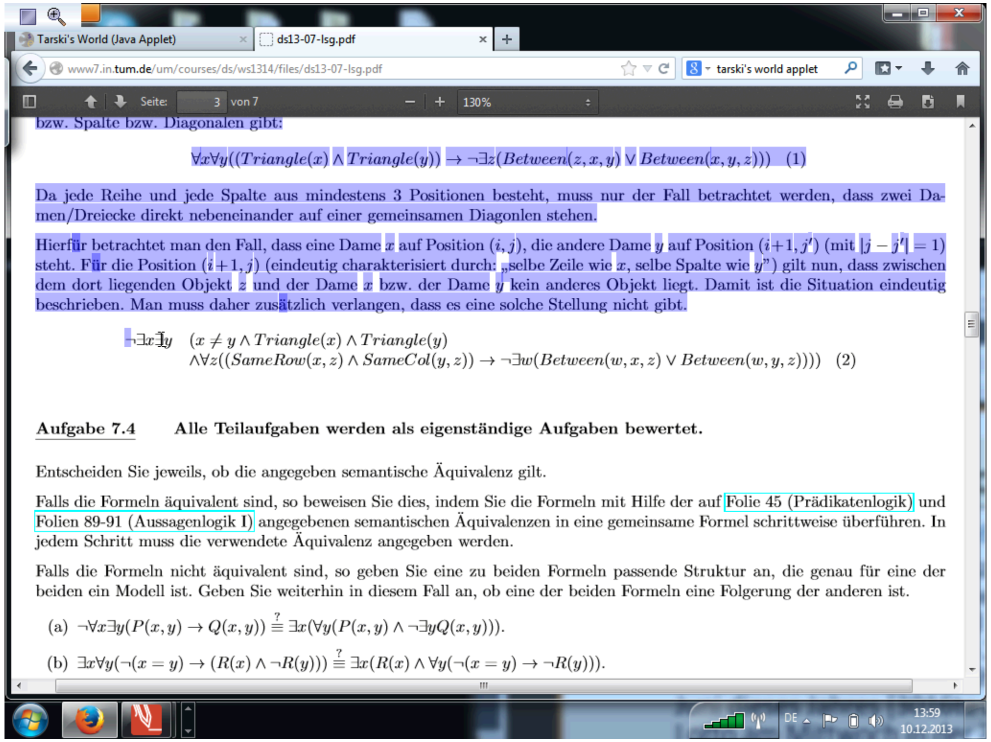
Duration: 91:53 min

Pages: 55









bzw. Spalte bzw. Diagonalen gibt:

$$\forall x\forall y((Triangle(x)\land Triangle(y))\to\neg\exists z(Between(z,x,y)\lor Between(x,y,z)))\quad(1)$$

Da jede Reihe und jede Spalte aus mindestens 3 Positionen besteht, muss nur der Fall betrachtet werden, dass zwei Damen/Dreiecke direkt nebeneinander auf einer gemeinsamen Diagonlen stehen.

Hierfür betrachtet man den Fall, dass eine Dame x auf Position (i,j), die andere Dame y auf Position $(i+1,j')$ (mit $|j-j'|=1$) steht. Für die Position $(i+1,j)$ (eindeutig charakterisiert durch: „selbe Zeile wie x, selbe Spalte wie y") gilt nun, dass zwischen dem dort liegenden Objekt z und der Dame x bzw. der Dame y kein anderes Objekt liegt. Damit ist die Situation eindeutig beschrieben. Man muss daher zusätzlich verlangen, dass es eine solche Stellung nicht gibt.

$$\begin{aligned}\neg\exists x\exists y\quad&(x\neq y\land Triangle(x)\land Triangle(y)\\&\land\forall z((SameRow(x,z)\land SameCol(y,z))\to\neg\exists w(Between(w,x,z)\lor Between(w,y,z))))\end{aligned}\quad(2)$$

Aufgabe 7.4 **Alle Teilaufgaben werden als eigenständige Aufgaben bewertet.**

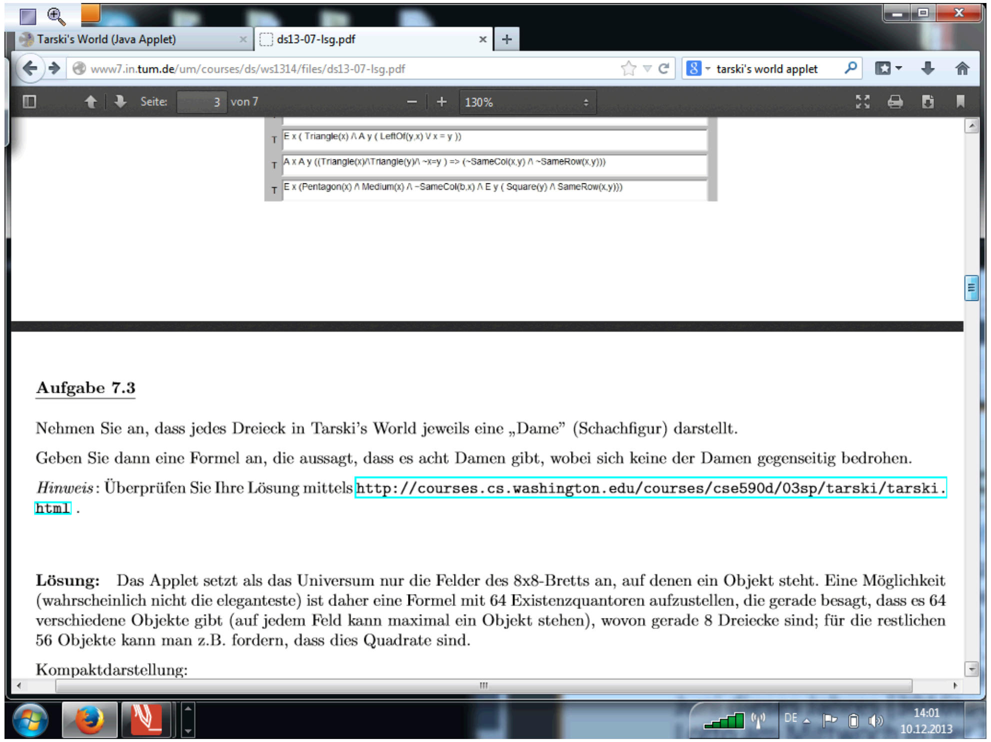
Entscheiden Sie jeweils, ob die angegeben semantische Äquivalenz gilt.

Falls die Formeln äquivalent sind, so beweisen Sie dies, indem Sie die Formeln mit Hilfe der auf Folie 45 (Prädikatenlogik) und Folien 89-91 (Aussagenlogik I) angegebenen semantischen Äquivalenzen in eine gemeinsame Formel schrittweise überführen. In jedem Schritt muss die verwendete Äquivalenz angegeben werden.

Falls die Formeln nicht äquivalent sind, so geben Sie eine zu beiden Formeln passende Struktur an, die genau für eine der beiden ein Modell ist. Geben Sie weiterhin in diesem Fall an, ob eine der beiden Formeln eine Folgerung der anderen ist.

(a) $\neg\forall x\exists y(P(x,y)\to Q(x,y))\overset{?}{\equiv}\exists x(\forall y(P(x,y)\land\neg\exists yQ(x,y)))$.

(b) $\exists x\forall y(\neg(x=y)\to(R(x)\land\neg R(y)))\overset{?}{\equiv}\exists x(R(x)\land\forall y(\neg(x=y)\to\neg R(y)))$.



E x (Triangle(x) ∧ A y (LeftOf(y,x) ∨ x = y))

A x A y ((Triangle(x)∧Triangle(y)∧ ~x=y) => (~SameCol(x,y) ∧ ~SameRow(x,y)))

E x (Pentagon(x) ∧ Medium(x) ∧ ~SameCol(b,x) ∧ E y (Square(y) ∧ SameRow(x,y)))

Aufgabe 7.3

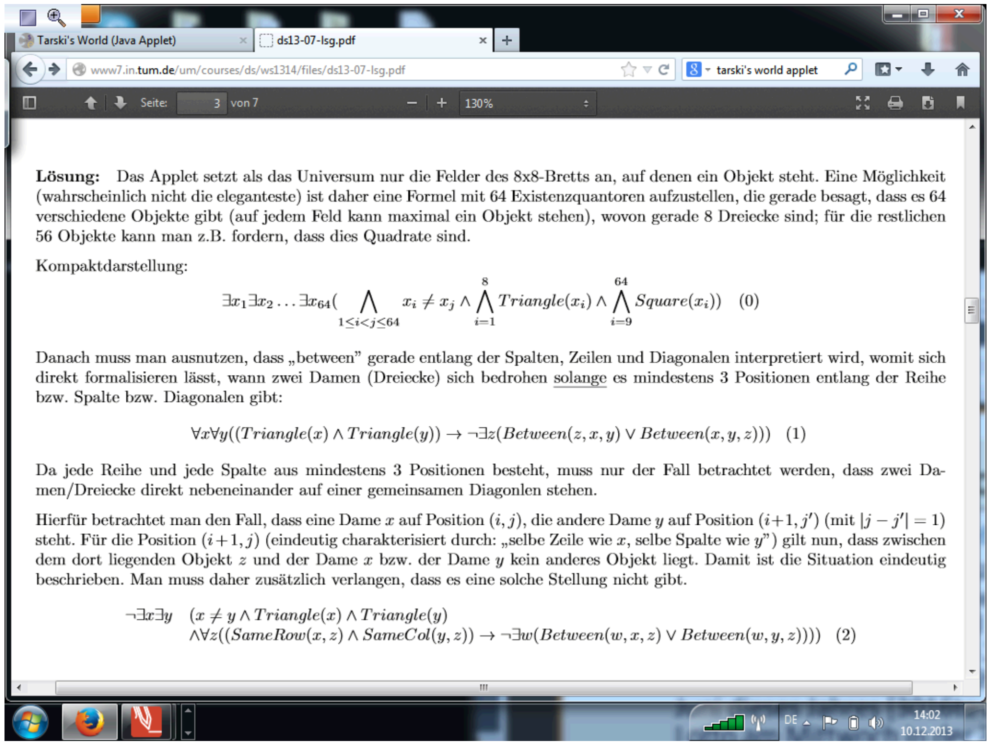
Nehmen Sie an, dass jedes Dreieck in Tarski's World jeweils eine „Dame" (Schachfigur) darstellt.

Geben Sie dann eine Formel an, die aussagt, dass es acht Damen gibt, wobei sich keine der Damen gegenseitig bedrohen.

Hinweis: Überprüfen Sie Ihre Lösung mittels `http://courses.cs.washington.edu/courses/cse590d/03sp/tarski/tarski.html`.

Lösung: Das Applet setzt als das Universum nur die Felder des 8x8-Bretts an, auf denen ein Objekt steht. Eine Möglichkeit (wahrscheinlich nicht die eleganteste) ist daher eine Formel mit 64 Existenzquantoren aufzustellen, die gerade besagt, dass es 64 verschiedene Objekte gibt (auf jedem Feld kann maximal ein Objekt stehen), wovon gerade 8 Dreiecke sind; für die restlichen 56 Objekte kann man z.B. fordern, dass dies Quadrate sind.

Kompaktdarstellung:



Lösung: Das Applet setzt als das Universum nur die Felder des 8x8-Bretts an, auf denen ein Objekt steht. Eine Möglichkeit (wahrscheinlich nicht die eleganteste) ist daher eine Formel mit 64 Existenzquantoren aufzustellen, die gerade besagt, dass es 64 verschiedene Objekte gibt (auf jedem Feld kann maximal ein Objekt stehen), wovon gerade 8 Dreiecke sind; für die restlichen 56 Objekte kann man z.B. fordern, dass dies Quadrate sind.

Kompaktdarstellung:

$$\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_{64}(\bigwedge_{1\leq i<j\leq 64}x_i\neq x_j\land\bigwedge_{i=1}^{8}Triangle(x_i)\land\bigwedge_{i=9}^{64}Square(x_i))\quad(0)$$

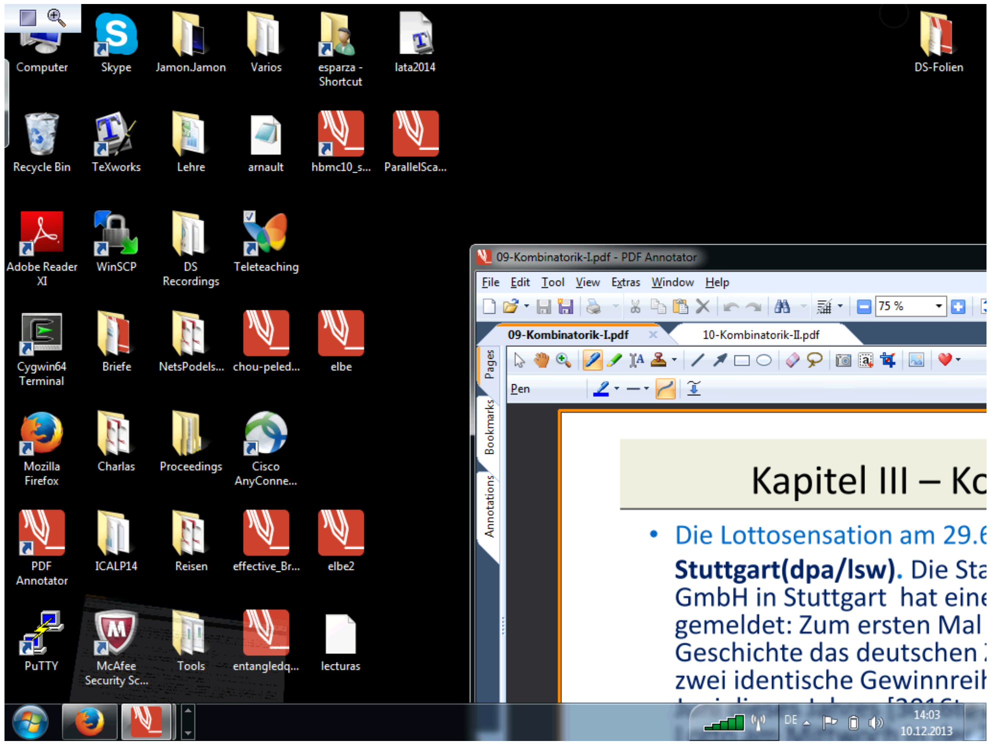
Danach muss man ausnutzen, dass „between" gerade entlang der Spalten, Zeilen und Diagonalen interpretiert wird, womit sich direkt formalisieren lässt, wann zwei Damen (Dreiecke) sich bedrohen solange es mindestens 3 Positionen entlang der Reihe bzw. Spalte bzw. Diagonalen gibt:

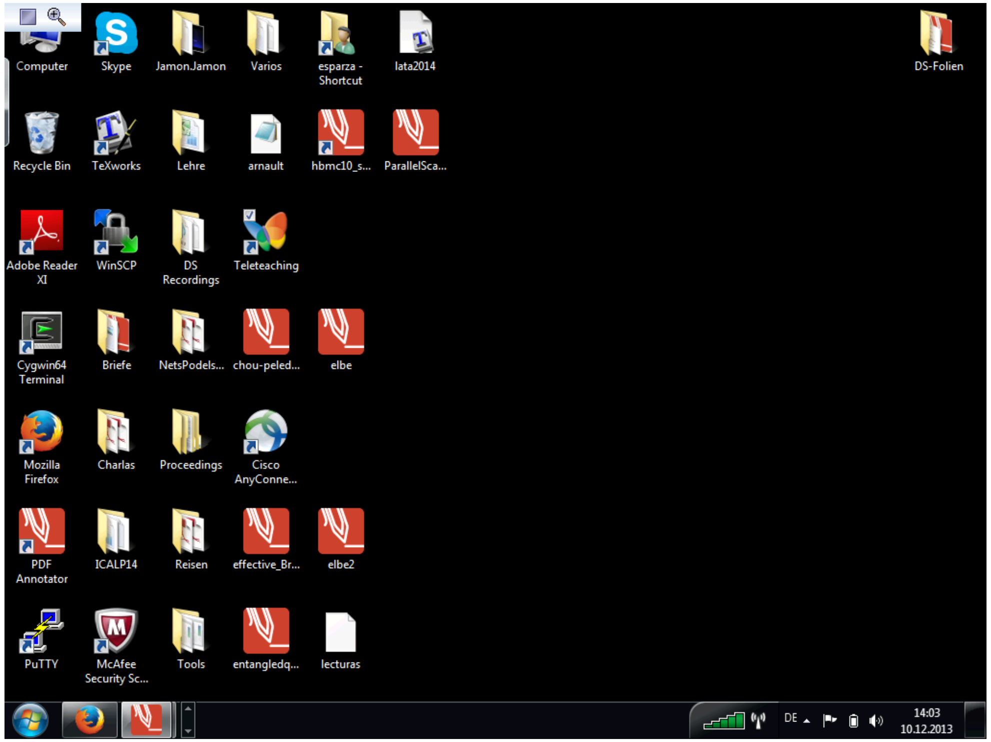
$$\forall x\forall y((Triangle(x)\land Triangle(y))\to\neg\exists z(Between(z,x,y)\lor Between(x,y,z)))\quad(1)$$

Da jede Reihe und jede Spalte aus mindestens 3 Positionen besteht, muss nur der Fall betrachtet werden, dass zwei Damen/Dreiecke direkt nebeneinander auf einer gemeinsamen Diagonlen stehen.

Hierfür betrachtet man den Fall, dass eine Dame x auf Position (i,j), die andere Dame y auf Position $(i+1,j')$ (mit $|j-j'|=1$) steht. Für die Position $(i+1,j)$ (eindeutig charakterisiert durch: „selbe Zeile wie x, selbe Spalte wie y") gilt nun, dass zwischen dem dort liegenden Objekt z und der Dame x bzw. der Dame y kein anderes Objekt liegt. Damit ist die Situation eindeutig beschrieben. Man muss daher zusätzlich verlangen, dass es eine solche Stellung nicht gibt.

$$\begin{aligned}\neg\exists x\exists y\quad&(x\neq y\land Triangle(x)\land Triangle(y)\\&\land\forall z((SameRow(x,z)\land SameCol(y,z))\to\neg\exists w(Between(w,x,z)\lor Between(w,y,z))))\end{aligned}\quad(2)$$





Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

  Wirklich eine Sensation?

  Unter der Annahme, dass alle Sequenzen genau so wahrscheinlich sind, haben wir für die W'keit p, nach 3016 Ziehungen mindestens eine Wiederholung gesehen zu haben:

$$p = \frac{S - HE}{S} = 1 - \frac{M^{3016}}{M^{3016}} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M-(j-1)}{M}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

  Wirklich eine Sensation?

  Für die Berechnung von HE ziehen wir 3016 Elemente aus Z, geordnet, aber ohne Zurücklegen. Wir erhalten:

$$HE = M^{\underline{3016}}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

  Wirklich eine Sensation?

  Mit der Abschätzung $1 - x \le e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M-(j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung $1 - x \le e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M-(j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Lottosensation am 29.6.1995

Wirklich eine Sensation?

Mit der Abschätzung $1 - x \le e^{-x}$ erhalten wir

$$p = 1 - \prod_{j=1}^{3016} \frac{M-(j-1)}{M} = 1 - \prod_{j=1}^{3016} 1 - \frac{(j-1)}{M}$$

$$\ge 1 - \prod_{j=1}^{3016} e^{-\frac{j-1}{M}} = 1 - e^{-\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{3016} j}$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

n Studierende werden mit dem „Drogen-Protokoll" gefragt, ob sie illegale Drogen probiert haben. Sei j die Anzahl der Studierende, die tatsächlich Drogen probiert haben. Mit welcher W'keit antworten mindestens m Studierende „ja" ($m \ge j$)?

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

n Studierende werden mit dem „Drogen-Protokoll" gefragt, ob sie illegale Drogen probiert haben. Sei j die Anzahl der Studierende, die tatsächlich Drogen probiert haben. Mit welcher W'keit antworten mindestens m Studierende „ja" ($m \ge j$)?

$n = 434$

$m = 292$ 150

142

die Wahrheit — Sie sagen

Ja $\longrightarrow$ Ja

Nein $\xrightarrow{1/2}$ Ja 142

Nein $\xrightarrow{1/2}$ Nein 142

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

n Studierende werden mit dem „Drogen-Protokoll“ gefragt, ob sie illegale Drogen probiert haben. Sei j die Anzahl der Studierende, die tatsächlich Drogen probiert haben. Mit welcher W‘keit antworten mindestens m Studierende „ja“ ($m \geq j$)?

$j \leq m$

die Wahrheit — Sie sagen

Ja → Ja

Nein $\xrightarrow{1/2}$ Ja

Nein $\xrightarrow{1/2}$ Nein

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

Das ist die W′keit, dass bei $(n-j)$ Würfe einer Münze mindestens $(m-j)$ -mal “Zahl” vorkommt.

Anzahl der Möglichen Wurfsequenzen: 2^{n-j}

Anzahl der Wurfsequenzen mit mindestens $(m-j)$-mal “Zahl”: $\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-j}{m-j+k}$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

n Studierende werden mit dem „Drogen-Protokoll“ gefragt, ob sie illegale Drogen probiert haben. Sei j die Anzahl der Studierende, die tatsächlich Drogen probiert haben. Mit welcher W‘keit antworten mindestens m Studierende „ja“ ($m \geq j$)?

$j \leq m$

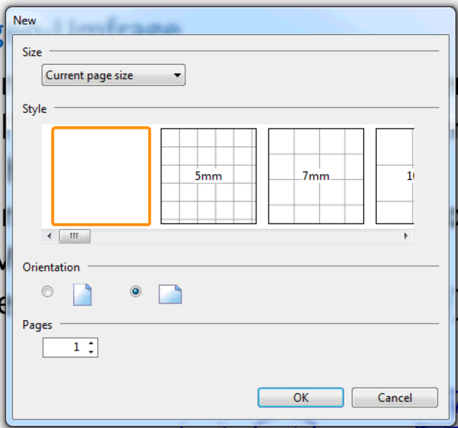
die Wahrheit — Sie sagen

j Ja → Ja $\quad j$

$(n-j)$ Nein $\xrightarrow{1/2}$ Ja $\quad m-j$

Nein $\xrightarrow{1/2}$ Nein

Kapitel III – Kombinatorik



Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

  Das ist die W'keit, dass bei $(n-j)$ Würfe einer Münze mindestens $(m-j)$ -mal "Zahl" vorkommt.

  Anzahl der Möglichen Wurfsequenzen: 2^{n-j}

  Anzahl der Wurfsequenzen mit mindestens $(m-j)$-mal "Zahl": $\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-j}{m-j+k}$

$n-j=4$

KKKK

K Z

ZZZZ

2^4

$1,1,2,\ldots,n-j$

$n-j$

$m-j+1$

$m-j \quad m-j+1 \quad m-j+2 \quad \ldots \quad n-j$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

  W'keit:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-j}{m-j+k}}{2^{n-j}}$$

- Mit $n = 434, m = 292, j = 100$ erhalten wir

$$\frac{\sum_{k=0}^{142}\binom{334}{192+k}}{2^{334}} = \frac{\sum_{k=192}^{334}\binom{334}{k}}{2^{334}} \approx 0.0027$$

Kapitel III – Kombinatorik

- Die Drogen-Umfrage

  n Studierende werden mit dem „Drogen-Protokoll" gefragt, ob sie illegale Drogen probiert haben. Sei j die Anzahl der Studierende, die tatsächlich Drogen probiert haben. Mit welcher W'keit antworten mindestens m Studierende „ja" ($m \geq j$)?

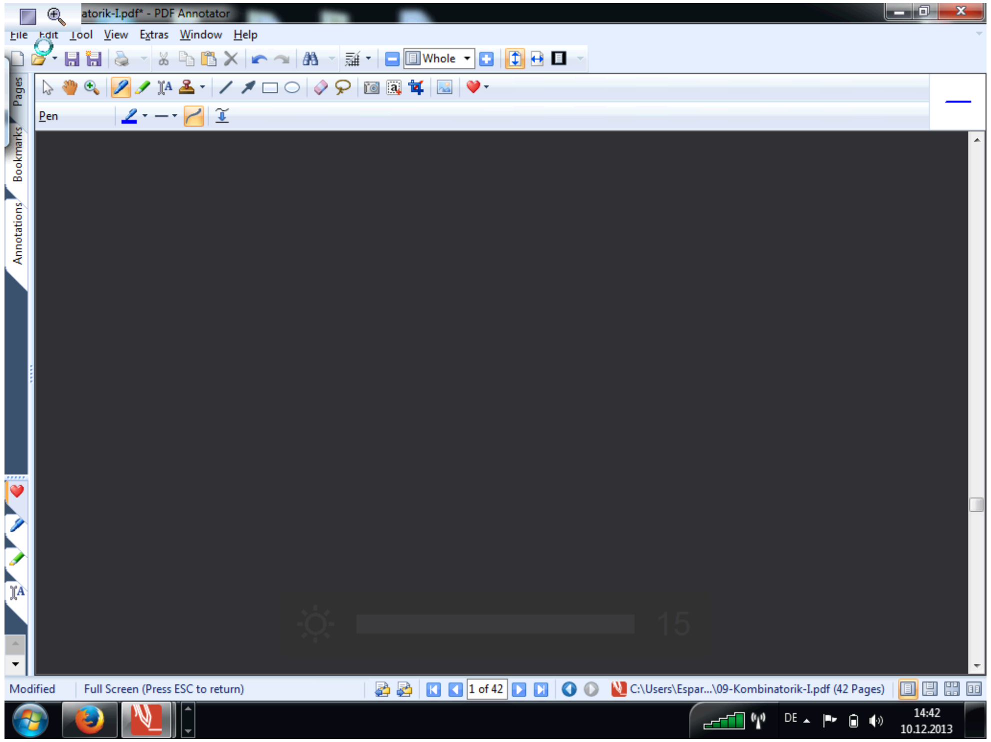
$j \leq m$

die Wahrheit   Sie sagen

j Ja $\longrightarrow$ Ja j

$\rightarrow (n-j)$ Nein $\xrightarrow{1/2}$ Ja $\quad m-j \rightarrow$

Nein $\xrightarrow{1/2}$ Nein



- Kombinatorische Beweisprinzipien

  Grundlegenden Abzählprinzipien, die zur Lösung von Abzählproblemen verwendet werden.
  - Produkregel
  - Regel des getrennten Abzählens oder Summenregel
  - Gleichheitsregel
  - Prinzip des doppelten Abzählens
  - Prinzip der Inklusion/Exklusion
  - Das Schubfachprinzip

Produktregel

Die Kardinalität des kartesischen Produkts endlicher Mengen ist gleich dem Produkt ihrer Kardinalitäten.

$$|S_1 \times \cdots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n|$$

- Die Produktregel

  Beispiel:

  Wieviele 4-stelligen Zahlen gibt es, deren i-te Ziffer eine durch i teilbare Zahl ist?

  Sei $S_i \subseteq \{0, \ldots, 9\}, i \in \{1, \ldots, 4\}$, die Menge, die alle durch i teilbaren Zahlen aus {0,...,9} enthält.

  Dann lassen sich die gesuchten Zahlen als Elemente der Relation $R = S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4$ darstellen.

- Die Produktregel

  Beispiel:

  Wieviele 4-stelligen Zahlen gibt es, deren *i*-te Ziffer eine durch *i* teilbare Zahl ist?

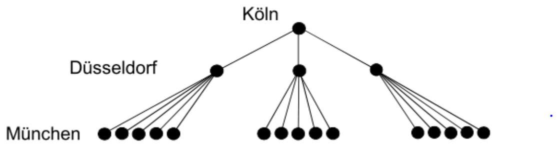
$$\begin{aligned} S_1 &= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ S_2 &= \{0,2,4,6,8\} \\ S_3 &= \{0,3,6,9\} \\ S_4 &= \{0,4,8\} \end{aligned}$$

Nach der Produktregel gibt es $10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 600$ solche Zahlen.

Kapitel II– Kombinatorik

- Produktregel als Baumdiagramm

  Angenommen, wir können auf drei Wegen von Köln nach Düsseldorf und auf 5 Wegen von Düsseldorf nach München fahren. Wieviele Wege gibt es von Köln nach München?



Kapitel II– Kombinatorik

Regel des getrennten Abzählens
(Summenregel)

Die Kardinalität einer disjunkten Vereinigung von Mengen ist gleich der Summe ihrer Kardinalitäten.

$$|S_1 \uplus S_2 \uplus \cdots \uplus S_n| = |S_1| + \cdots + |S_n|$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Die Regel des getrennten Abzählens (Summenregel)

  Auf wie viele Arten können 6 Mädchen und 8 Jungen in eine Reihe von 5 Stühlen setzen, wenn Mädchen und Jungen abwechselnd sitzen müssen?

  Es werden getrennt die Anzahl von Sitzreihen, die mit einem Mädchen beginnen und die mit einem Jungen beginnen gezählt.

Kapitel II– Kombinatorik

- Die Regel des getrennten Abzählens (Summenregel)

  Mit Mädchen beginnende Reihen:

  $$M = 6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 = 6720$$

  Mit Jungen beginnenden Reihen:

  $$J = 8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 = 10080$$

  Insgesamt $M + J = 16800$ Reihen.

Typischer Fehler: Man nimmt irrtümlich an, dass die Mengen $S_1, \ldots, S_n$ Disjunkt sind.

Beispiel : zwei Spieler spielen Poker. Der erste Spieler bekommt die Hand

A♣ A♥ A♦ 2♠ 3♣

Mit welcher W'keit gewinnt er?

Wir können die Anzahl der Hände berechnen, die gegen diese Hand verlieren.

Gegen die Hand verliert man:

- mit einer Hand der Gestalt XXXYZ. Sei T die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand der Gestalt XXYYZ. Sei DP die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand der Gestalt XXYZW. Sei P die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand XYZUW, die kein straight (konsekutive Werte), flush (selbe Farbe), oder straight flush (straight und flush) sind. Sei KP (kein Paar) die Anzahl dieser Hände.

13

47

3

44

Gegen die Hand verliert man: $12\binom{4}{3} \cdot \underline{44} \cdot 43$

- mit einer Hand der Gestalt XXXYZ. Sei T die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand der Gestalt XXYYZ. Sei DP die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand der Gestalt XXYZW. Sei P die Anzahl dieser Hände.
- mit einer Hand XYZUW, die kein straight (konsekutive Werte), flush (selbe Farbe), oder straight flush (straight und flush) sind. Sei KP (kein Paar) die Anzahl dieser Hände.

Damit ist die Gesamtzahl $T + DP + P + KP$.

Richtig?

Typischer Fehler: Man nimmt irrtümlich an, dass die Mengen $S_1, \ldots, S_n$ Disjunkt sind.

Beispiel : zwei Spieler spielen Poker. Der erste Spieler bekommt die Hand

A♣ A♥ A♦ 2♠ 3♣

$\binom{52}{5}$

$\binom{47}{5}$

Mit welcher W'keit gewinnt er?

Wir können die Anzahl der Hände berechnen, die gegen diese Hand verlieren.

Gleichheitsregel

Existiert eine Bijektion $f: S \to T$ dann haben die Mengen S und T gleich viele Elemente.

- Anwendung der Gleichheitsregel

  Beispiel: Wieviele Elemente hat $P(\{1, \ldots, n\})$?

  Sei $W = \{0,1\}^n$ die Menge aller n-stelligen Zeichenreihen bestehend aus den Zahlen 0 u. 1.

  Nach der Produktregel gilt $|W| = 2^n$.

  Für $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei $f(A) = w_1 w_2 \ldots w_n \in W$ mit $w_k = 1$ falls $k \in A$ und $w_k = 0$ sonst.

  Beispiel mit $n = 5$: $f(\{1,3\}) = 10100$

Kapitel II– Kombinatorik

- Anwendung der Gleichheitsregel

  Beispiel: Wieviele Elemente hat $P(\{1, \dots, n\})$?

  Da es sich bei f um eine bijektive Abbildung handelt gilt nach der Gleichheitsregel

  $|P(\{1, \dots, n\})| = |W| = 2^n$.

Kapitel II– Kombinatorik

- Noch eine Anwendung der Gleichheitsregel

  Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Euro unter m Kinder zu verteilen?

  Für $n = 5$ und $m = 3$ gibt es 21 Möglichkeiten:

5 0 0	4 1 0	4 0 1	3 2 0	3 1 1
3 0 2	2 3 0	2 2 1	2 1 2	2 0 3
1 4 0	1 3 1	1 2 2	1 1 3	1 0 4
0 5 0	0 4 1	0 3 2	0 2 3	0 1 4
0 0 5				

Kapitel II– Kombinatorik

- Anwendung der Gleichheitsregel

  Beispiel: Wieviele Möglichkeiten gibt es, n Euro unter m Kinder zu verteilen?

  Die Funktion f ist eine Bijektion zwischen der Menge der Verteilungen und der Menge der n-Multimengen einer m-elementigen Menge. Damit ist die Anzahl der Verteilungen

$$\binom{m+n-1}{m-1}$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Eine $n \times m$ Matrix ist ein zweidimensionales Feld mit n Zeilen und m Spalten, deren Einträge Zahlen sind.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

Eine $n \times m$ Matrix ist ein zweidimensionales Feld mit n Zeilen und m Spalten, deren Einträge Zahlen sind.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} = 6 \\ = 9 \\ = 6 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 8 & 5 & 7 & 1 \end{array} & 21 \end{array}$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

Sei $r_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ die Summe der Elementen der i-te Reihe von A.

Sei $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ die Summe der Elementen der j-te Spalte von A.

Sei $M_r = \sum_{i=1}^{n} r_i$ die Summe der Reihensummen

Sei $M_c = \sum_{j=1}^{m} c_j$ die Summe der Spaltensummen

Prinzip des doppelten Abzählens: $M_r = M_c$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen für Relationen

Eine Relation $R \subseteq S \times T$ mit $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ und $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ kann durch ihre Inzidenzmatrix beschrieben werden.

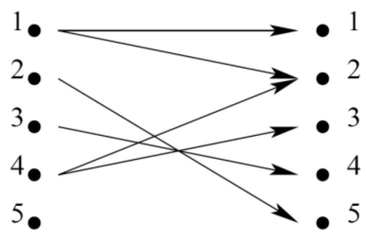
Die Inzidenzmatrix von R ist die $n \times m$ Matrix mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } s_i \, R \, t_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

Beispiel: Relation und Inzidenzmatrix



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Sei $S = T = \{1, \dots, 8\}$. Wir betrachten die Relation $i \mid j$ (i ist Teiler von j).

  Die Inzidenzmatrix ist:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Frage: Wieviele Teiler hat eine Zahl von 1 bis 8 in Durchschnitt?

  Antwort: Sei $t(j)$ = Anzahl von Einsen in Spalte j
  = Anzahl der Teiler von j.

$$avg(8) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} t(i) = \frac{1+2+2+3+2+4+2+4}{8}$$

$$= 2.5$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Sei $S = T = \{1, \dots, 8\}$. Wir betrachten die Relation $i \mid j$ (i ist Teiler von j).

  Die Inzidenzmatrix ist:

  (i,j)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Frage: Wieviele Teiler hat eine Zahl von 1 bis 8 in Durchschnitt?

  Antwort: Sei $t(j)$ = Anzahl von Einsen in Spalte j
  = Anzahl der Teiler von j.

$$avg(8) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} t(i) = \frac{1+2+2+3+2+4+2+4}{8}$$

$$= 2.5$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Frage: Wie groß ist $avg(n)$ für beliebiges n?

  Schwer wenn wir die Spalten addieren!

  In der i-ten Zeile stehen jedoch die Vielfachen von i, nämlich $1i,\ 2i,\ \ldots,\ \lfloor n/i \rfloor i$ und damit

$$M_r(i) = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \qquad M_r = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Sei $S = T = \{1, \ldots, 8\}$. Wir betrachten die Relation $i \mid j$ (i ist Teiler von j).

  Die Inzidenzmatrix ist:

  (i,j)

  $t(6)$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

t

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Frage: Wie groß ist $avg(n)$ für beliebiges n?

  Schwer wenn wir die Spalten addieren!

  In der i-ten Zeile stehen jedoch die Vielfachen von i, nämlich $1i,\ 2i,\ \ldots,\ \lfloor n/i \rfloor i$ und damit

$$M_r(i) = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \qquad M_r = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Kapitel II– Kombinatorik

- Doppeltes Abzählen

  Frage: Wie groß ist $avg(n)$ für beliebiges n?

  Antwort: Doppeltes Abzählen:

$$avg(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t(i) = \frac{1}{n} M_c = \frac{1}{n} M_r$$