Script **generated by TTT**

Title: T?ubig: GAD (26.04.2012)

Date: Thu Apr 26 12:29:34 CEST 2012

Duration: 45:52 min

Pages: 26

Beispiel: Binäre Suche

BinarySearch(A, n, x)

Input : n: Anzahl der (sortierten) Zahlen
$A[0], \dots, A[n-1]$: Zahlenfolge
x: gesuchte Zahl

Output : Index der gesuchten Zahl

$\ell = 0$;	$O(1)$
$r = n - 1$;	$O(1)$
while $(\ell \leq r)$ **do**	$O(\sum_{i=1}^{k} T(I))$
$\quad m = \lfloor (r + \ell)/2 \rfloor$;	$O(1) \uparrow$
$\quad$ **if** $A[m] == x$ **then return** m;	$O(1)$
$\quad$ **if** $A[m] < x$ **then** $\ell = m + 1$;	$O(1)$
$\quad$ **else** $r = m - 1$;	$O(1)$
return -1	$O(1)$

$$O\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right) = O(k)$$

Beispiel: Binäre Suche

Aber: Wie groß ist die Anzahl der Schleifendurchläufe k?

Größe des verbliebenen Suchintervalls $(r - \ell + 1)$ nach Iteration i:

$$\begin{aligned} s_0 &= n \\ s_{i+1} &\leq \lfloor s_i/2 \rfloor \end{aligned}$$

Bei $s_i < 1$ endet der Algorithmus.

$$\Rightarrow \quad k \leq \log_2 n$$

Gesamtkomplexität: $O(\log n)$

Beispiel: Bresenham-Algorithmus

Bresenham1

$x = 0$; $\quad y = R$;	$O(1)$
plot$(0, R)$; plot$(R, 0)$; plot$(0, -R)$; plot$(-R, 0)$;	$O(1)$
$F = \frac{5}{4} - R$;	$O(1)$
while $x < y$ **do**	$O(\sum_{i=1}^{k} T(I))$
$\quad$ **if** $F < 0$ **then**	
$\quad\quad F = F + 2 * x + 1$;	
$\quad$ **else**	
$\quad\quad F = F + 2 * x - 2 * y + 2$;	alles $O(1)$
$\quad\quad y = y - 1$;	
$\quad x = x + 1$;	
$\quad$ plot(x, y); plot$(-x, y)$; plot$(-y, x)$; plot$(-y, -x)$;	
$\quad$ plot(y, x); plot$(y, -x)$; plot$(x, -y)$; plot$(-x, -y)$;	

Wie groß ist Anzahl Schleifendurchläufe k? $\quad O\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right) = O(k)$

Beispiel: Bresenham-Algorithmus

- Betrachte dazu die Entwicklung der Wert der Funktion

$$\varphi(x,y) = y - x$$

- Anfangswert: $\varphi_0(x,y) = R$
- Monotonie: verringert sich pro Durchlauf um mindestens 1
- Beschränkung: durch die **while**-Bedingung $x < y$ bzw. $0 < y - x$

$\Rightarrow$ maximal R Runden

Beispiel: Bresenham-Algorithmus

Bresenham1

$x = 0; \quad y = R;$	$O(1)$
plot$(0,R)$; plot$(R,0)$; plot$(0,-R)$; plot$(-R,0)$;	$O(1)$
$F = \frac{5}{4} - R;$	$O(1)$
while $x < y$ **do**	$O(\sum_{i=1}^{k} T(I))$
if $F < 0$ **then**	
$F = F + 2 * x + 1;$	
else	
$F = F + 2 * x - 2 * y + 2;$	alles $O(1)$
$y = y - 1;$	
$x = x + 1;$	
plot(x,y); plot$(-x,y)$; plot$(-y,x)$; plot$(-y,-x)$;	
plot(y,x); plot$(y,-x)$; plot$(x,-y)$; plot$(-x,-y)$;	

Wie groß ist Anzahl Schleifendurchläufe k? $O\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right) = O(k)$

Effizienz Laufzeitanalyse

Beispiel: Bresenham-Algorithmus

- Betrachte dazu die Entwicklung der Wert der Funktion

$$\varphi(x,y) = y - x$$

- Anfangswert: $\varphi_0(x,y) = R$
- Monotonie: verringert sich pro Durchlauf um mindestens 1
- Beschränkung: durch die **while**-Bedingung $x < y$ bzw. $0 < y - x$

$\Rightarrow$ maximal R Runden

H. Täubig (TUM) GAD SS'12 87 / 631

Beispiel: Fakultätsfunktion

fakultaet(n)

Input : $n \in \mathbb{N}_+$	
Output : $n!$	
if $(n == 1)$ **then**	$O(1)$
return 1	$O(1)$
else	
return $n * fakultaet(n-1)$	$O(1 + \ldots ?)$

- $T(n)$: Laufzeit von fakultaet(n)
- $T(1) = O(1)$
- $T(n) = T(n-1) + O(1)$

$\Rightarrow T(n) = O(n)$

Übersicht

3 Effizienz
- Effizienzmaße
- Rechenregeln für $\mathcal{O}$-Notation
- Maschinenmodell / Pseudocode
- Laufzeitanalyse
- Durchschnittliche Laufzeit

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

increment(A)

Input : Array A mit Binärzahl in $A[0] \ldots A[n-1]$,
in $A[n]$ steht eine 0

Output : inkrementierte Binärzahl in $A[0] \ldots A[n]$

$i = 0$;
while $(A[i] == 1)$ **do**
    $A[i] = 0$;
    $i = i + 1$;
$A[i] = 1$;

Durchschnittliche Laufzeit für Zahl mit n Bits?

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Analyse:

- Sei $\mathcal{I}_n$ die Menge der n-Bit-Instanzen.
- Für die Hälfte $(1/2)$ der Zahlen $x_{n-1} \ldots x_0 \in \mathcal{I}_n$ ist $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ 1 Schleifendurchlauf

- Für die andere Hälfte gilt für die Hälfte (also insgesamt $1/4$) der Zahlen $x_1 x_0 = 01$

$\Rightarrow$ 2 Schleifendurchläufe

- Für den Anteil $(1/2)^k$ der Zahlen gilt $x_{k-1} x_{k-2} \ldots x_0 = 01 \ldots 1$

$\Rightarrow$ k Schleifendurchläufe

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Durchschnittliche Laufzeit:

$$
\begin{aligned}
t(n) &= \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} T(i) \\
&= \frac{1}{\cancel{|\mathcal{I}_n|}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{|\mathcal{I}_n|}}{2^k} \cdot \mathcal{O}(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{O}\left(\frac{k}{2^k}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right) \stackrel{?}{=} \mathcal{O}(1)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Lemma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1+2}{2^1} \qquad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Für n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Lemma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1+2}{2^1} \qquad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Für n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Lemma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1+2}{2^1} \qquad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Für n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Beweis.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&\leq 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \qquad \text{(laut Ind.vor.)} \\
&= 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel: Binärzahl-Inkrementierung

Lemma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Beweis.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1+2}{2^1} \qquad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Für n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt diskret.

Der Wertebereich diskreter Zufallsvariablen

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ist ebenfalls endlich bzw. abzählbar unendlich.

Schreibweise: $\Pr[X = x] := \Pr\left[X^{-1}(x)\right] = \sum_{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x} \Pr[\omega]$

Effizienz | Durchschnittliche Laufzeit

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt diskret.

Der Wertebereich diskreter Zufallsvariablen

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ist ebenfalls endlich bzw. abzählbar unendlich.

Schreibweise: $\Pr[X = x] := \Pr\left[X^{-1}(x)\right] = \sum_{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x} \Pr[\omega]$

H. Täubig (TUM) GAD SS'12 96 / 631

Effizienz | Durchschnittliche Laufzeit

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt diskret.

Der Wertebereich diskreter Zufallsvariablen

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ist ebenfalls endlich bzw. abzählbar unendlich.

Schreibweise: $\Pr[X = x] := \Pr\left[X^{-1}(x)\right] = \sum_{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x} \Pr[\omega]$

H. Täubig (TUM) GAD SS'12 96 / 631

Zufallsvariable

Definition

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω nennt man eine Abbildung $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge heißt diskret.

Der Wertebereich diskreter Zufallsvariablen

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ist ebenfalls endlich bzw. abzählbar unendlich.

Schreibweise: $\Pr[X = x] := \Pr\left[X^{-1}(x)\right] = \sum_{\omega \in \Omega | X(\omega) = x} \Pr[\omega]$

Zufallsvariable

Beispiel

Wir ziehen aus einem Poker-Kartenspiel mit 52 Karten (13 von jeder Farbe) eine Karte.

Wir bekommen bzw. bezahlen einen bestimmten Betrag, je nachdem welche Farbe die Karte hat, z.B. 4 Euro für Herz, 7 Euro für Karo, −5 Euro für Kreuz und −3 Euro für Pik.

Wenn wir ein As ziehen, bekommen wir zusätzlich 1 Euro.

$\Omega = \{\heartsuit A, \heartsuit K, \ldots, \heartsuit 2, \diamondsuit A, \diamondsuit K, \ldots, \diamondsuit 2, \clubsuit A, \clubsuit K, \ldots, \clubsuit 2, \spadesuit A, \spadesuit K, \ldots, \spadesuit 2\}$.

X sei der Geldbetrag den wir bekommen bzw. bezahlen.

$W_X = \{-5, -4, -3, -2, 4, 5, 7, 8\}$

$\Pr[X = -3] = \Pr[\spadesuit K] + \ldots + \Pr[\spadesuit 2] = 12/52 = 3/13$

Zufallsvariable

Beispiel

Wir ziehen aus einem Poker-Kartenspiel mit 52 Karten (13 von jeder Farbe) eine Karte.

Wir bekommen bzw. bezahlen einen bestimmten Betrag, je nachdem welche Farbe die Karte hat, z.B. 4 Euro für Herz, 7 Euro für Karo, −5 Euro für Kreuz und −3 Euro für Pik.

Wenn wir ein As ziehen, bekommen wir zusätzlich 1 Euro.

$\Omega = \{\heartsuit A, \heartsuit K, \ldots, \heartsuit 2, \diamondsuit A, \diamondsuit K, \ldots, \diamondsuit 2, \clubsuit A, \clubsuit K, \ldots, \clubsuit 2, \spadesuit A, \spadesuit K, \ldots, \spadesuit 2\}$.

X sei der Geldbetrag den wir bekommen bzw. bezahlen.

$W_X = \{-5, -4, -3, -2, 4, 5, 7, 8\}$

$\Pr[X = -3] = \Pr[\spadesuit K] + \ldots + \Pr[\spadesuit 2] = 12/52 = 3/13$

Zufallsvariable

Beispiel

Wir ziehen aus einem Poker-Kartenspiel mit 52 Karten (13 von jeder Farbe) eine Karte.

Wir bekommen bzw. bezahlen einen bestimmten Betrag, je nachdem welche Farbe die Karte hat, z.B. 4 Euro für Herz, 7 Euro für Karo, −5 Euro für Kreuz und −3 Euro für Pik.

Wenn wir ein As ziehen, bekommen wir zusätzlich 1 Euro.

$\Omega = \{\heartsuit A, \heartsuit K, \ldots, \heartsuit 2, \diamondsuit A, \diamondsuit K, \ldots, \diamondsuit 2, \clubsuit A, \clubsuit K, \ldots, \clubsuit 2, \spadesuit A, \spadesuit K, \ldots, \spadesuit 2\}$.

X sei der Geldbetrag den wir bekommen bzw. bezahlen.

$W_X = \{-5, -4, -3, -2, 4, 5, 7, 8\}$

$\Pr[X = -3] = \Pr[\spadesuit K] + \ldots + \Pr[\spadesuit 2] = 12/52 = 3/13$

Erwartungswert

Definition

Für eine (diskrete) Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x)$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel

(Beispiel wie zuvor)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 4 \cdot \frac{12}{52} + 5 \cdot \frac{1}{52} + 7 \cdot \frac{12}{52} + 8 \cdot \frac{1}{52} \\ &\quad + (-5) \cdot \frac{12}{52} + (-4) \cdot \frac{1}{52} + (-3) \cdot \frac{12}{52} + (-2) \cdot \frac{1}{52} = \frac{43}{12}\end{aligned}$$

Erwartungswert

Definition

Für eine (diskrete) Zufallsvariable X ist der Erwartungswert definiert als

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x)$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel

(Beispiel wie zuvor)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 4 \cdot \frac{12}{52} + 5 \cdot \frac{1}{52} + 7 \cdot \frac{12}{52} + 8 \cdot \frac{1}{52} \\ &\quad + (-5) \cdot \frac{12}{52} + (-4) \cdot \frac{1}{52} + (-3) \cdot \frac{12}{52} + (-2) \cdot \frac{1}{52} = \frac{43}{12}\end{aligned}$$

Erwartungswert zusammengesetzter Zufallsvariablen

Satz (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und

$$X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Interessant ist für uns vor allem der einfache Fall:

$$X := X_1 + \ldots + X_n$$

mit

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n].$$