Script generated by TTT

Title: Täubig: GAD (21.06.2012)

Date: Thu Jun 21 12:30:29 CEST 2012

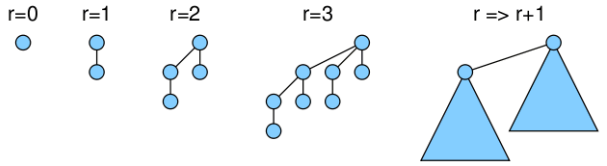
Duration: 45:17 min

Pages: 18

Binomial Heaps

basieren auf Binomial-Bäumen

- Form-Invariante:



- Heap-Invariante:

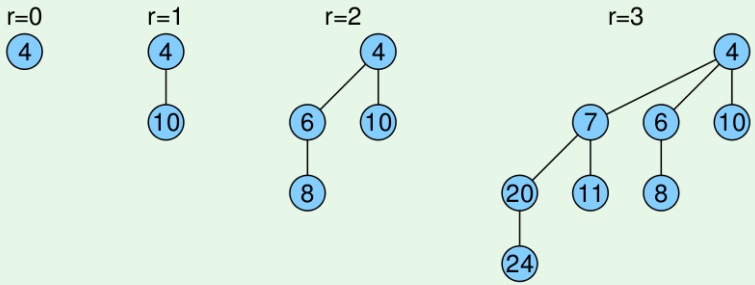
$$\text{prio(Vater)} \leq \text{prio(Kind)}$$

wichtig: Elemente der Priority Queue werden in Heap Items gespeichert, die eine feste Adresse im Speicher haben und damit als Handles dienen können (im Gegensatz zu array-basierten Binärheaps)

Binomial-Bäume

Beispiel

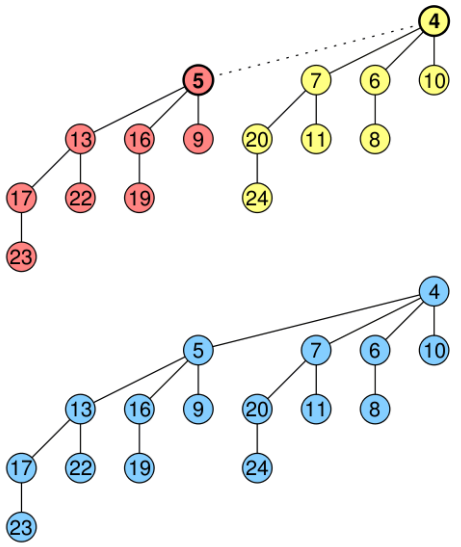
Korrekte Binomial-Bäume:



Binomial-Baum: Merge

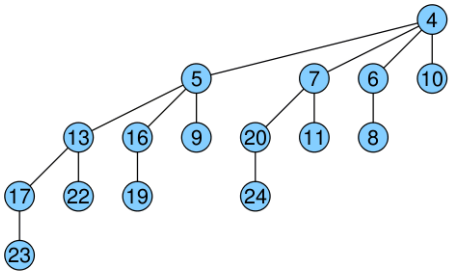
Wurzel mit größerem Wert wird neues Kind der Wurzel mit kleinerem Wert! (Heap-Bedingung)

aus zwei B_{r-1} wird ein B_r

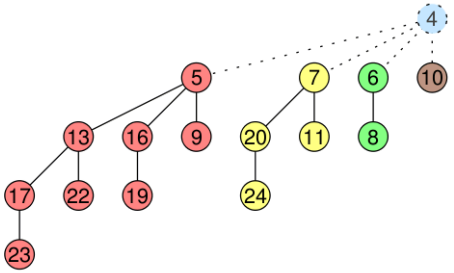


Binomial-Baum: Löschen der Wurzel (deleteMin)

aus einem B_r



werden $B_{r-1}, \ldots, B_0$



Binomial-Baum: Knotenanzahl

B_r hat auf Level $k \in \{0, \ldots, r\}$ genau $\binom{r}{k}$ Knoten

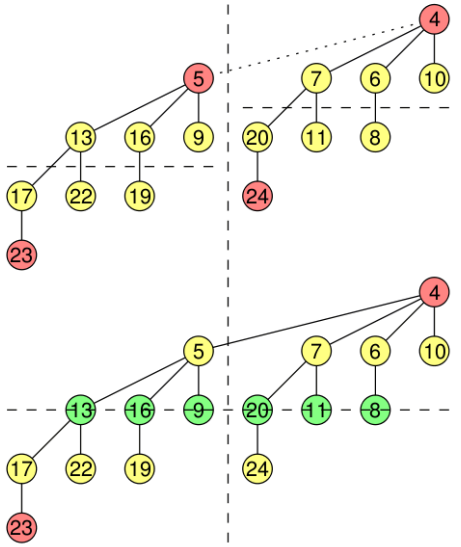
Warum?

Bei Bau des B_r aus 2 B_{r-1} gilt:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}$$

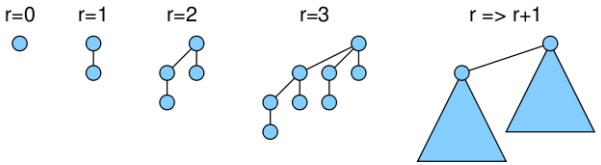
Insgesamt: B_r hat 2^r Knoten

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} = 2^r$$



Binomial-Bäume

Eigenschaften von Binomial-Bäumen:



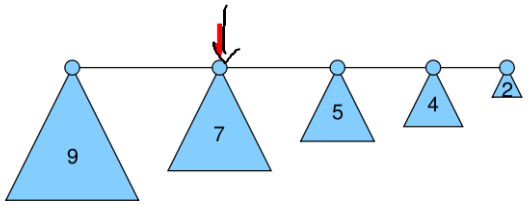
Binomial-Baum vom Rang r

- hat Höhe r (gemessen in Kanten)
- hat maximalen Grad r (Wurzel)
- hat auf Level $\ell \in \{0, \ldots, r\}$ genau $\binom{r}{\ell}$ Knoten
- hat $\sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell} = 2^r$ Knoten
- zerfällt bei Entfernen der Wurzel in r Binomial-Bäume von Rang 0 bis $r-1$

Binomial Heap

Binomial Heap:

- verkettete Liste von Binomial-Bäumen
- pro Rang maximal 1 Binomial-Baum
- Zeiger auf Wurzel mit minimalem Prioritätswert

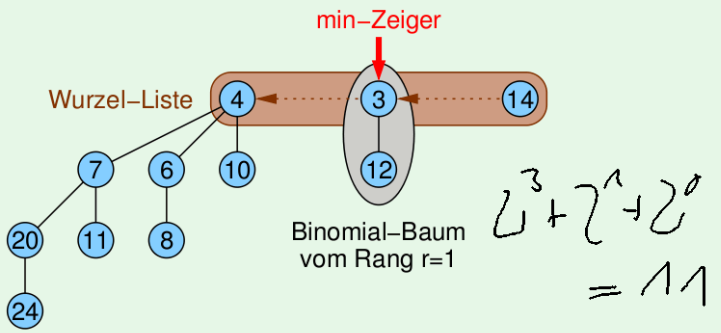


(Zahlen: Ränge)

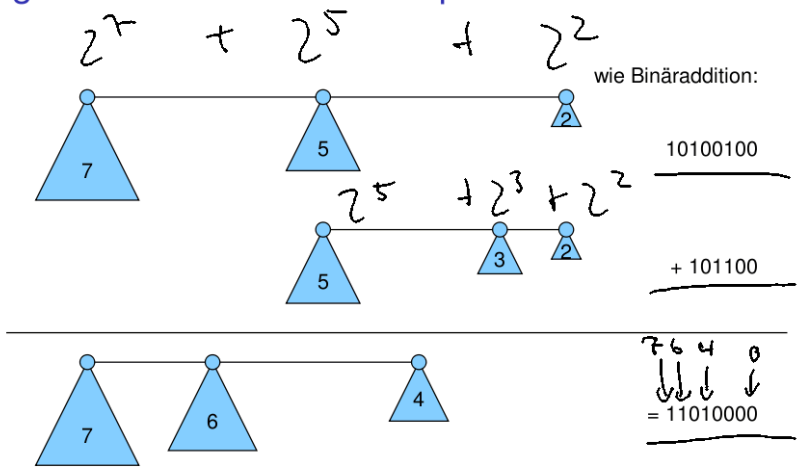
Binomial Heap

Beispiel

Korrekter Binomial Heap:



Merge von zwei Binomial Heaps



Aufwand für Merge: $O(\log n)$

Binomial Heaps

B_i: Binomial-Baum mit Rang i

Operationen:

- merge: $O(\log n)$
- insert(e): Merge mit B_0, Zeit $O(\log n)$
- min(): spezieller Zeiger, Zeit $O(1)$
- deleteMin():
  sei das Minimum in B_i,
  durch Löschen der Wurzel zerfällt der Binomialbaum in $B_0, \ldots, B_{i-1}$
  Merge mit dem restlichen Binomial Heap kostet $O(\log n)$

Binomial Heaps

Weitere Operationen:

- decreaseKey(h, k): siftUp-Operation in Binomial-Baum für das Element, auf das h zeigt,
  dann ggf. noch min-Zeiger aktualisieren

  Zeit: $O(\log n)$

- remove(h): Sei e das Element, auf das h zeigt.
  Setze prio(e) $= -\infty$ und wende siftUp-Operation auf e an bis e in der Wurzel, dann weiter wie bei deleteMin

  Zeit: $O(\log n)$

Verbesserungen

- Fibonacci-Heap:

  Verbesserung von Binomial Heaps mit folgenden Kosten:
  - min, insert, merge: $O(1)$ (worst case)
  - decreaseKey: $O(1)$ (amortisiert)
  - deleteMin, remove: $O(\log n)$ (amortisiert)

- ganzzahlige Werte:

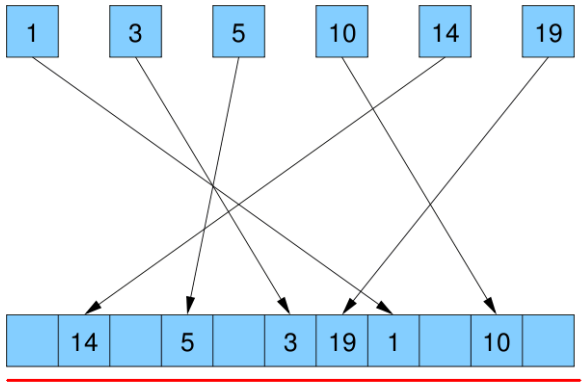
  Priority Queues bekannt, die für decreaseKey und insert Zeit $O(1)$ und für deleteMin Zeit $O(\log \log n)$ benötigen

Übersicht

Übersicht

Vergleich Wörterbuch / Suchstruktur

- Wörterbuch effizient über Hashing realisierbar



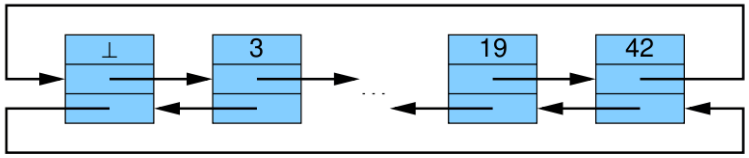
- Hashing zerstört die Ordnung auf den Elementen

$\Rightarrow$ keine effiziente locate-Operation

$\Rightarrow$ keine Intervallanfragen

Suchstruktur

Erster Ansatz: sortierte Liste



Problem:

- insert, remove, locate kosten im worst case $\Theta(n)$ Zeit

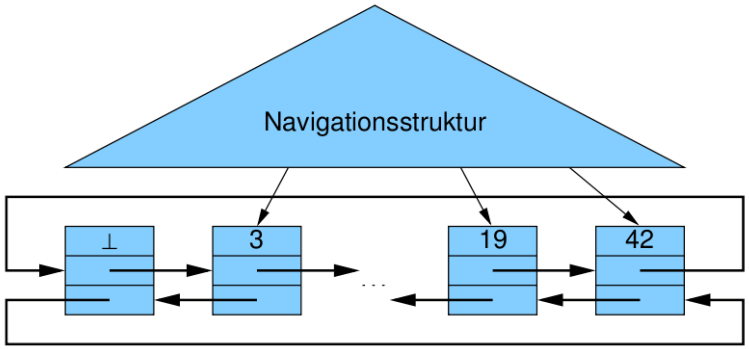
Einsicht:

- wenn locate effizient implementierbar, dann auch die anderen Operationen

Suchstruktur

Idee:

- füge Navigationsstruktur hinzu, die locate effizient macht



Übersicht