Script generated by TTT

Title: Täubig: GAD (01.07.2014)

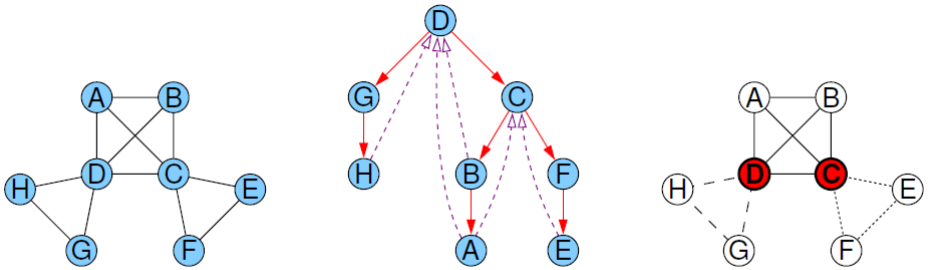
Date: Tue Jul 01 13:58:48 CEST 2014

Duration: 106:12 min

Pages: 61

Artikulationsknoten und Blöcke per DFS

- Kanten werden auf einem anfangs leeren Stack gesammelt
- Rückwärtskanten kommen direkt auf den Stack (ohne rek. Aufruf)
- Baumkanten kommen vor dem rekursiven Aufruf auf den Stack
- nach Rückkehr von einem rekursiven Aufruf werden im Fall `low[w]≥num[v]` die obersten Kanten vom Stack bis einschließlich der Baumkante $\{v, w\}$ entfernt und bilden den nächsten Block



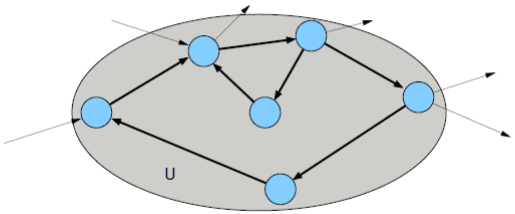
Starke Zusammenhangskomponenten

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.

Knotenteilmenge $U \subseteq V$ heißt stark zusammenhängend genau dann, wenn für alle $u, v \in U$ ein gerichteter Pfad von u nach v in G existiert.

Für Knotenteilmenge $U \subseteq V$ heißt der induzierte Teilgraph $G[U]$ starke Zusammenhangskomponente von G, wenn U stark zusammenhängend und (inklusions-)maximal ist.



Starke Zusammenhangskomponenten

Beobachtungen:

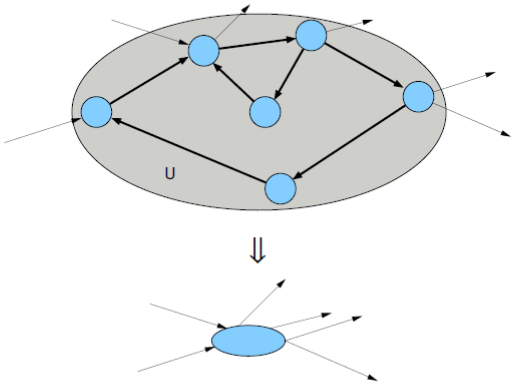
- Knoten $x, y \in V$ sind stark zusammenhängend, falls beide Knoten auf einem gemeinsamen gerichteten Kreis liegen (oder $x = y$).
- Die starken Zusammenhangskomponenten bilden eine Partition der Knotenmenge.

  (im Gegensatz zu 2-Zhk. bei ungerichteten Graphen, wo nur die Kantenmenge partitioniert wird, sich aber zwei verschiedene 2-Zhk. in einem Knoten überlappen können)

Starke Zusammenhangskomponenten

Beobachtungen:

- Schrumpft man alle starken Zusammenhangskomponenten zu einzelnen (Super-)Knoten, ergibt sich ein DAG.



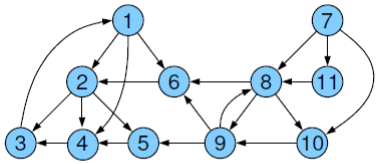
Starke Zhk. und DFS

Idee:

- beginne mit Graph ohne Kanten, jeder Knoten ist eigene SCC
- füge nach und nach einzelne Kanten ein

$\Rightarrow$ aktueller (current) Graph $G_c = (V, E_c)$

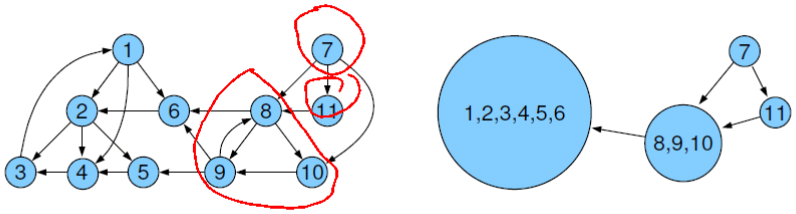
- Update der starken Zusammenhangskomponenten (SCCs)



Starke Zhk. und DFS

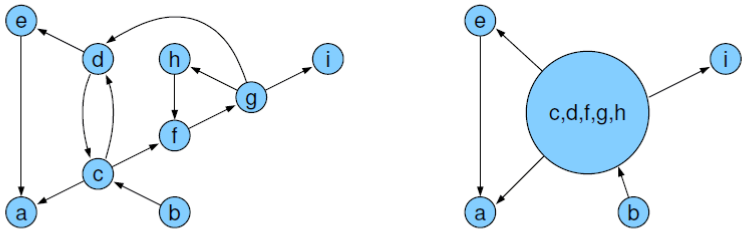
Idee:

- betrachte geschrumpften (shrunken) Graph G_c^s:
  Knoten entsprechen SCCs von G_c, Kante (C, D) genau dann, wenn es Knoten $u \in C$ und $v \in D$ mit $(u, v) \in E_c$ gibt
- geschrumpfter Graph G_c^s ist ein DAG
- Ziel: Aktualisierung des geschrumpften Graphen beim Einfügen



Starke Zhk. und DFS

Geschrumpfter Graph
(Beispiel aus Mehlhorn / Sanders)



Starke Zhk. und DFS

Update des geschrumpften Graphen nach Einfügen einer Kante:

3 Möglichkeiten:

- beide Endpunkte gehören zu derselben SCC

⇒ geschrumpfter Graph unverändert

- Kante verbindet Knoten aus zwei verschiedenen SCCs, aber schließt keinen Kreis

⇒ SCCs im geschrumpften Graph unverändert, aber eine Kante wird im geschrumpften Graph eingefügt (falls nicht schon vorhanden)

- Kante verbindet Knoten aus zwei verschiedenen SCCs und schließt einen oder mehrere Kreise

⇒ alle SCCs, die auf einem der Kreise liegen, werden zu einer einzigen SCC verschmolzen

Starke Zhk. und DFS

Prinzip:

- Tiefensuche
  - V_c schon markierte (entdeckte) Knoten
  - E_c schon gefundene Kanten
- 3 Arten von SCC: unentdeckt, offen, geschlossen
- unentdeckte Knoten haben Ein-/Ausgangsgrad Null in G_c

⇒ zunächst bildet jeder Knoten eine eigene unentdeckte SCC, andere SCCs enthalten nur markierte Knoten

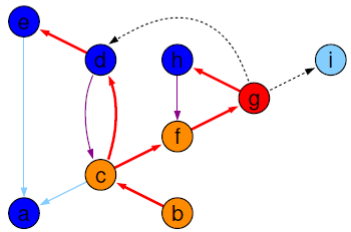
- SCCs mit mindestens einem aktiven Knoten (ohne finishNum) heißen offen
- SCC heißt geschlossen, falls sie nur fertige Knoten (mit finishNum) enthält
- Knoten in offenen / geschlossenen SCCs heißen offen / geschlossen

Starke Zhk. und DFS

- Knoten in geschlossenen SCCs sind immer fertig (mit finishNum)
- Knoten in offenen SCCs können fertig oder noch aktiv (ohne finishNum) sein
- Repräsentant einer SCC: Knoten mit kleinster dfsNum

Starke Zhk. und DFS

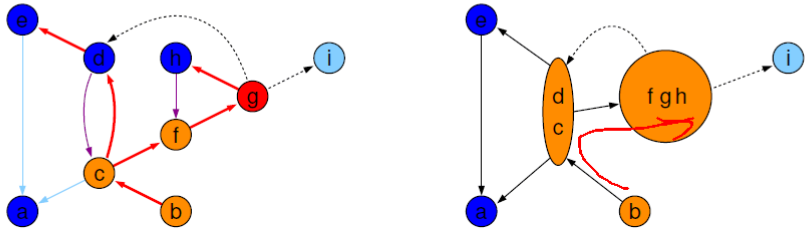
DFS-Snapshot:



- erste DFS startete bei Knoten a, zweite bei b
- aktueller Knoten ist g, auf dem Rekursionsstack liegen b, c, f, g
- (g, d) und (g, i) wurden noch nicht exploriert
- (d, c) und (h, f) sind Rückwärtskanten
- (c, a) und (e, a) sind Querkanten
- (b, c), (c, d), (d, e), (c, f), (f, g) und (g, h) sind Baumkanten

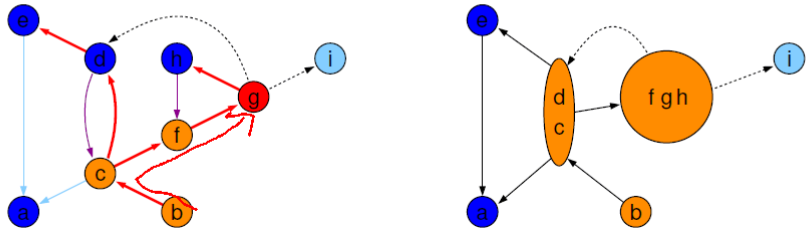
Starke Zhk. und DFS

DFS-Snapshot mit geschrumpftem Graph:



- unentdeckt: $\{i\}$ offen: $\{b\}, \{c, d\}, \{f, g, h\}$ geschlossen: $\{a\}, \{e\}$
- offene SCCs bilden Pfad im geschrumpften Graph
- aktueller Knoten gehört zur letzten SCC
- offene Knoten wurden in Reihenfolge b, c, d, f, g, h erreicht und werden von den Repräsentanten b, c und f genau in die offenen SCCs partitioniert

Starke Zhk. und DFS



Beobachtungen (Invarianten für G_c):

1. Pfade aus geschlossenen SCCs führen immer zu geschlossenen SCCs
2. Pfad zum aktuellen Knoten enthält die Repräsentanten aller offenen SCCs

   offene Komponenten bilden Pfad im geschrumpften Graph
3. Knoten der offenen SCCs in Reihenfolge der DFS-Nummern werden durch Repräsentanten in die offenen SCCs partitioniert

Starke Zhk. und DFS

Geschlossene SCCs von G_c sind auch SCCs in G:

- Sei v geschlossener Knoten und S / S_c seine SCC in G / G_c.
- zu zeigen: $S = S_c$
- G_c ist Subgraph von G, also $S_c \subseteq S$
- somit zu zeigen: $S \subseteq S_c$
- Sei w ein Knoten in S.

$\Rightarrow$ $\exists$ Kreis C durch v und w.

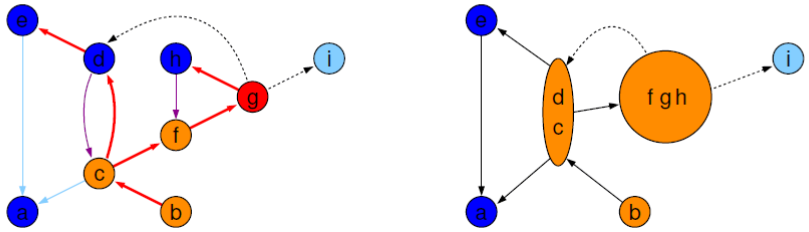
- Invariante 1: alle Knoten von C sind geschlossen und somit erledigt (alle ausgehenden Kanten exploriert)
- C ist in G_c enthalten, also $w \in S_c$
- damit gilt $S \subseteq S_c$, also $S = S_c$

Starke Zhk. und DFS

Vorgehen:

- Invarianten 2 und 3 helfen bei Verwaltung der offenen SCCs
- Knoten in offenen SCCs auf Stack oNodes (in Reihenfolge steigender dfsNum)
- Repräsentanten der offenen SCCs auf Stack oReps
- zu Beginn Invarianten gültig (alles leer)
- vor Markierung einer neuen Wurzel sind alle markierten Knoten erledigt, also keine offenen SCCs, beide Stacks leer
  dann: neue offene SCC für neue Wurzel s,
  s kommt auf beide Stacks

Starke Zhk. und DFS



Beobachtungen (Invarianten für G_c):

1. Pfade aus geschlossenen SCCs führen immer zu geschlossenen SCCs
2. Pfad zum aktuellen Knoten enthält die Repräsentanten aller offenen SCCs

   offene Komponenten bilden Pfad im geschrumpften Graph
3. Knoten der offenen SCCs in Reihenfolge der DFS-Nummern werden durch Repräsentanten in die offenen SCCs partitioniert

Starke Zhk. und DFS

Vorgehen:

- Invarianten 2 und 3 helfen bei Verwaltung der offenen SCCs
- Knoten in offenen SCCs auf Stack oNodes (in Reihenfolge steigender dfsNum)
- Repräsentanten der offenen SCCs auf Stack oReps
- zu Beginn Invarianten gültig (alles leer)
- vor Markierung einer neuen Wurzel sind alle markierten Knoten erledigt, also keine offenen SCCs, beide Stacks leer
  dann: neue offene SCC für neue Wurzel s,
  s kommt auf beide Stacks

Starke Zhk. und DFS

Prinzip: betrachte Kante $e = (v, w)$

- Kante zu unbekanntem Knoten w (Baumkante):
  neue eigene offene SCC für w (w kommt auf oNodes und oReps)
- Kante zu Knoten w in geschlossener SCC (Nicht-Baumkante):
  von w gibt es keinen Weg zu v, sonst wäre die SCC von w noch nicht geschlossen (geschlossene SCCs sind bereits komplett), also SCCs unverändert
- Kante zu Knoten w in offener SCC (Nicht-Baumkante):
  falls v und w in unterschiedlichen SCCs liegen, müssen diese mit allen SCCs dazwischen zu einer einzigen SCC verschmolzen werden (durch Löschen der Repräsentanten)

Wenn Knoten keine ausgehenden Kanten mehr hat:

- Knoten fertig
- wenn Knoten Repräsentant seiner SCC ist, dann SCC schließen

Starke Zhk. und DFS

Prinzip: betrachte Kante $e = (v, w)$

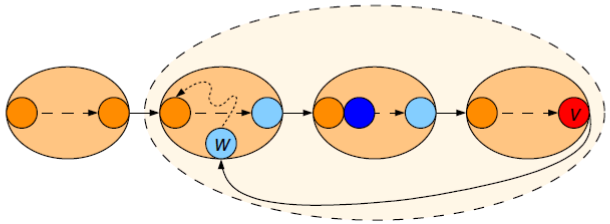
- Kante zu unbekanntem Knoten w (Baumkante):
  neue eigene offene SCC für w (w kommt auf oNodes und oReps)
- Kante zu Knoten w in geschlossener SCC (Nicht-Baumkante):
  von w gibt es keinen Weg zu v, sonst wäre die SCC von w noch nicht geschlossen (geschlossene SCCs sind bereits komplett), also SCCs unverändert
- Kante zu Knoten w in offener SCC (Nicht-Baumkante):
  falls v und w in unterschiedlichen SCCs liegen, müssen diese mit allen SCCs dazwischen zu einer einzigen SCC verschmolzen werden (durch Löschen der Repräsentanten)

Wenn Knoten keine ausgehenden Kanten mehr hat:

- Knoten fertig
- wenn Knoten Repräsentant seiner SCC ist, dann SCC schließen

Starke Zhk. und DFS

Vereinigung offener SCCs im Kreisfall:



- offene SCC entsprechen Ovalen, Knoten sortiert nach dfsNum
- alle Repräsentanten offener SCCs liegen auf Baumpfad zum aktuellen Knoten v in SCC S_k
- Nicht-Baumkante (v, w) endet an Knoten w in offener SCC S_i mit Repräsentant r_i
- Pfad von w nach r_i muss existieren (innerhalb SCC S_i)

$\Rightarrow$ Kante (v, w) vereinigt $S_i, \ldots, S_k$

Starke Zhk. und DFS

```
init() {
    component = new int[n];
    oReps = ⟨⟩;
    oNodes = ⟨⟩;
    dfsCount = 1;
}
```

```
root(Node w) / traverseTreeEdge(Node v, Node w) {
    oReps.push(w);      // Repräsentant einer neuen ZHK
    oNodes.push(w);     // neuer offener Knoten
    dfsNum[w] = dfsCount;
    dfsCount++;
}
```


Starke Zhk. und DFS

```
traverseNonTreeEdge(Node v, Node w) {
    if (w ∈ oNodes)      // verschmelze SCCs
        while (dfsNum[w] < dfsNum[oReps.top()])
            oReps.pop();
}
```

```
backtrack(Node u, Node v) {
    if (v == oReps.top()) {   // v Repräsentant?
        oReps.pop();   // ja: entferne v
        do {   // und offene Knoten bis v
            w = oNodes.pop();
            component[w] = v;
        } while (w!=v);
    }
}
```


Starke Zhk. und DFS

Zeit: $O(n+m)$

Begründung:

- init, root: $O(1)$
- traverseTreeEdge: $(n-1) \times O(1)$
- backtrack, traverseNonTreeEdge:
  da jeder Knoten höchstens einmal in oReps und oNodes landet,
  insgesamt $O(n+m)$
- DFS-Gerüst: $O(n+m)$
- gesamt: $O(n+m)$

Übersicht

9 Graphen
- Netzwerke und Graphen
- Graphrepräsentation
- Graphtraversierung
- Kürzeste Wege
- Minimale Spannbäume

Kürzeste Wege

Zentrale Frage: Wie kommt man am schnellsten von A nach B?

Fälle:

- Kantenkosten 1
- DAG, beliebige Kantenkosten
- beliebiger Graph, positive Kantenkosten
- beliebiger Graph, beliebige Kantenkosten

Kürzeste-Wege-Problem

gegeben:

- gerichteter Graph $G = (V, E)$
- Kantenkosten $c : E \mapsto \mathbb{R}$

2 Varianten:

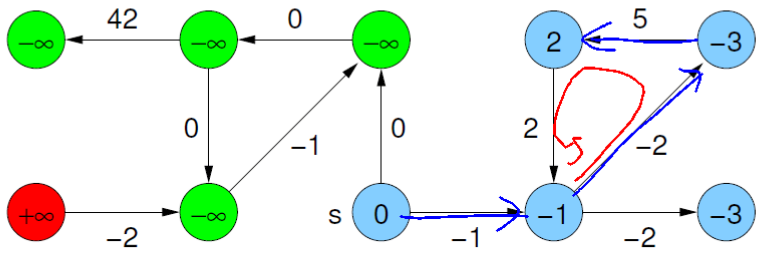
- SSSP (single source shortest paths):

  kürzeste Wege von einer Quelle zu allen anderen Knoten

- APSP (all pairs shortest paths):

  kürzeste Wege zwischen allen Paaren

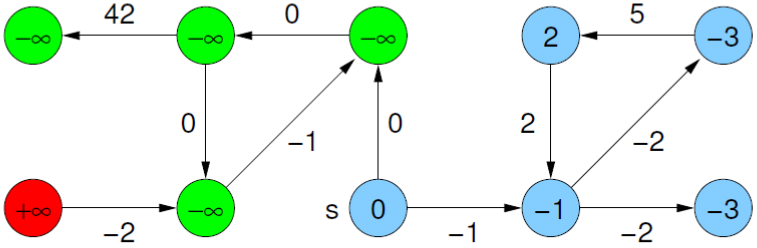
Distanzen



$\mu(s, v)$: Distanz von s nach v

$$\mu(s,v) = \begin{cases} +\infty & \text{kein Weg von } s \text{ nach } v \\ -\infty & \text{Weg beliebig kleiner Kosten von } s \text{ nach } v \\ \min\{c(p) : p \text{ ist Weg von } s \text{ nach } v\} \end{cases}$$

Distanzen



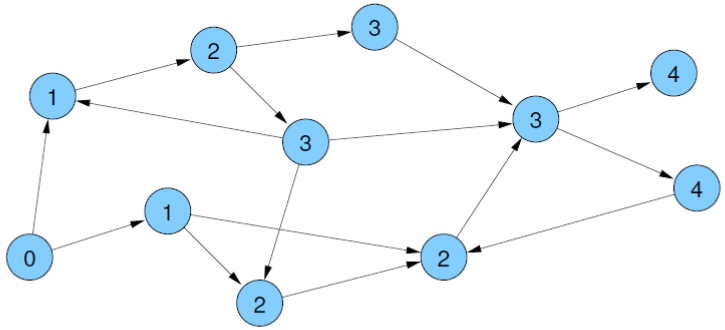
Wann sind die Kosten $-\infty$?

wenn es einen Kreis mit negativer Gewichtssumme gibt
(hinreichende und notwendige Bedingung)

Kürzeste Wege bei uniformen Kantenkosten

Graph mit Kantenkosten 1:

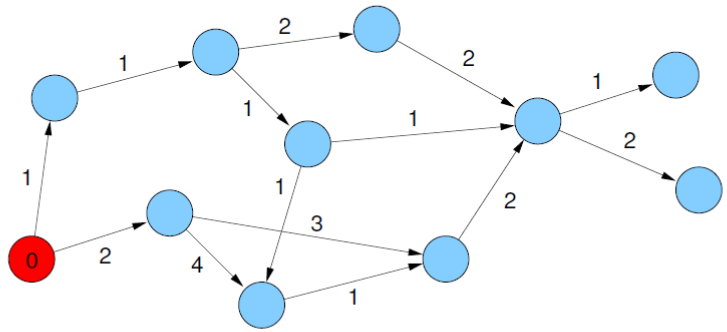
$\Rightarrow$ Breitensuche (BFS)



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

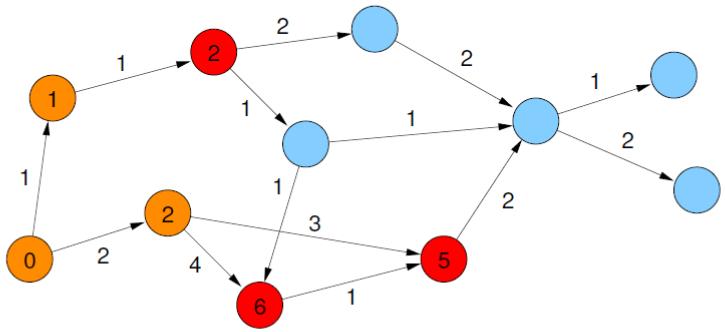
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

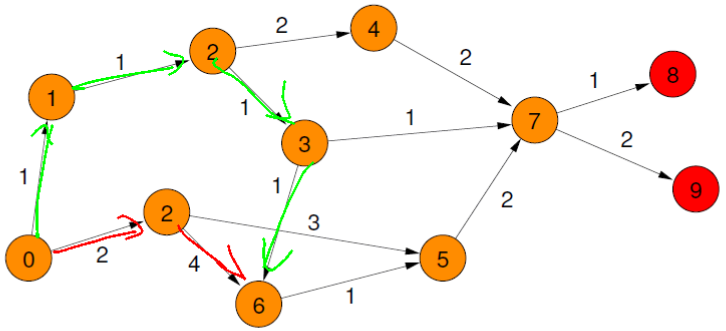
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

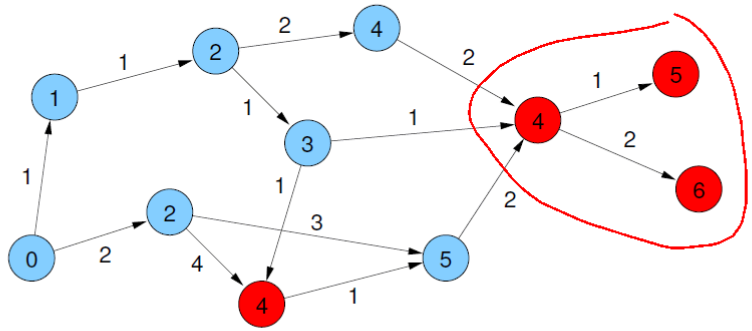
Einfache Breitensuche funktioniert nicht.



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Einfache Breitensuche funktioniert nicht.

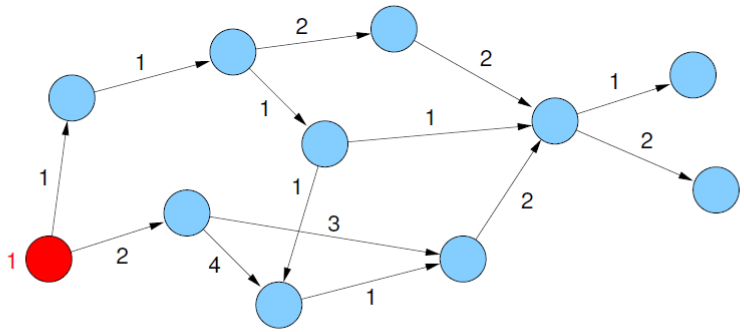


Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))

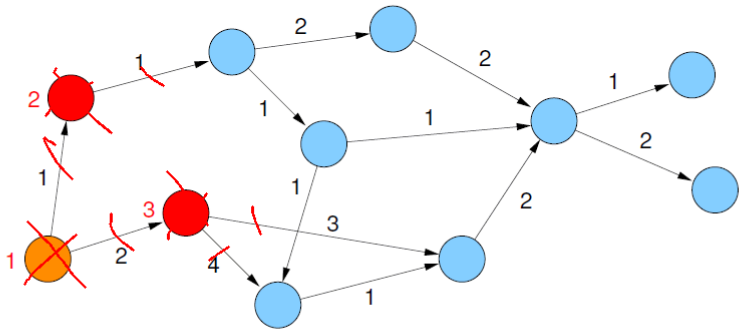


Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))

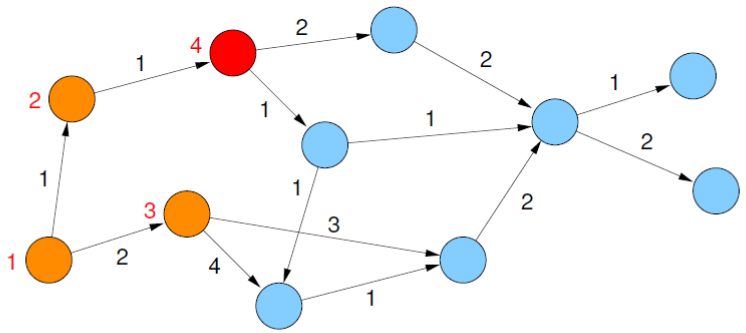


Topologische Sortierung in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie: in DAGs gibt es topologische Sortierung

(für alle Kanten e=(v,w) gilt topoNum(v) < topoNum(w))

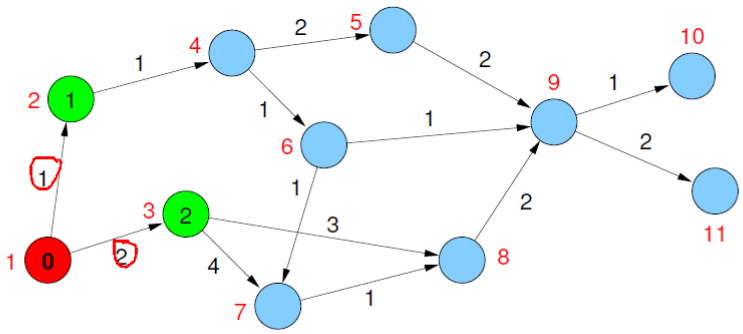


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

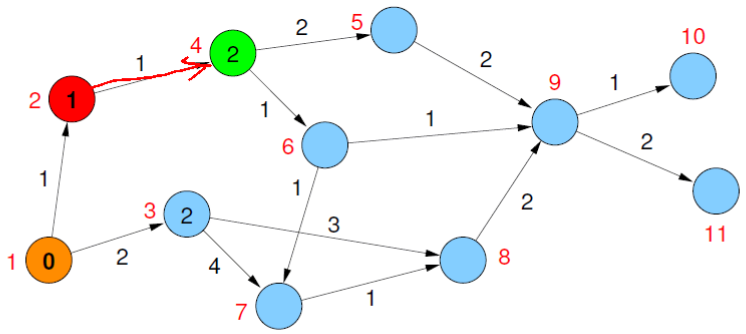


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

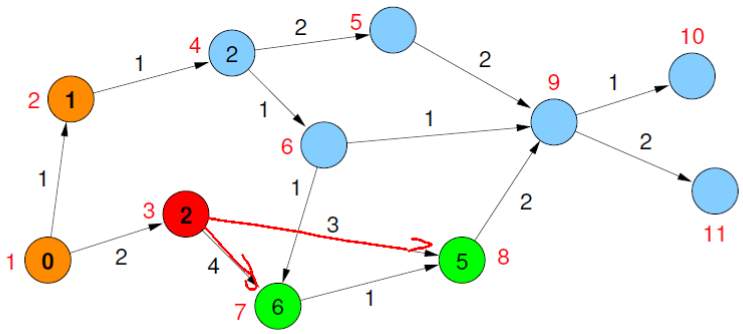


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

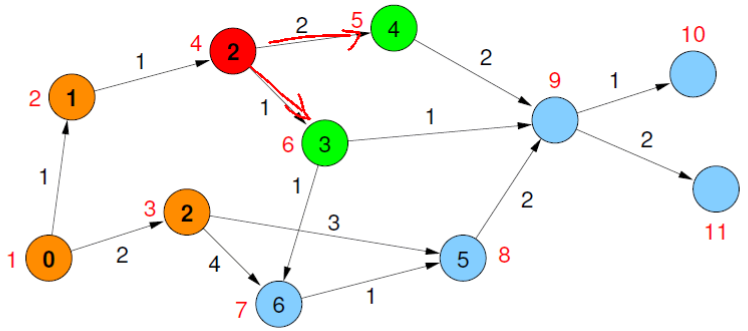


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

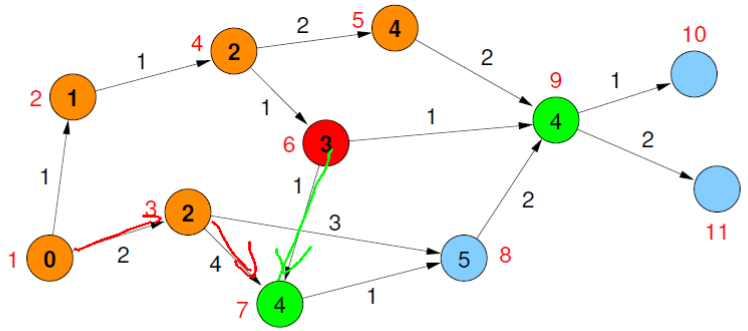


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte

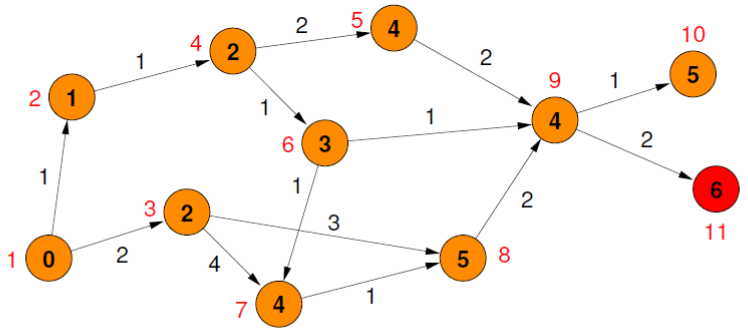


Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Strategie:

- betrachte Knoten in Reihenfolge der topologischen Sortierung
- aktualisiere Distanzwerte



Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Topologische Sortierung – warum funktioniert das?

- betrachte einen kürzesten Weg von s nach v
- der ganze Pfad beachtet die topologische Sortierung
- d.h., die Distanzen werden in der Reihenfolge der Knoten vom Anfang des Pfades zum Ende hin betrachtet
- damit ergibt sich für v der richtige Distanzwert

- ein Knoten x kann auch nie einen Wert erhalten, der echt kleiner als seine Distanz zu s ist
- die Kantenfolge von s zu x, die jeweils zu den Distanzwerten an den Knoten geführt hat, wäre dann ein kürzerer Pfad (Widerspruch)

Kürzeste Wege in DAGs

Beliebige Kantengewichte in DAGs

Allgemeine Strategie:

- Anfang: setze $d(s) = 0$ und
  für alle anderen Knoten v setze $d(v) = \infty$
- besuche Knoten in einer Reihenfolge, die sicherstellt, dass mindestens ein kürzester Weg von s zu jedem v in der Reihenfolge seiner Knoten besucht wird
- für jeden besuchten Knoten v aktualisiere die Distanzen der Knoten w mit $(v, w) \in E$, d.h. setze

$$d(w) = \min\{\, d(w),\ d(v) + c(v, w) \,\}$$

Kürzeste Wege in DAGs

Topologische Sortierung

- verwende FIFO-Queue q
- verwalte für jeden Knoten einen Zähler für die noch nicht markierten eingehenden Kanten
- initialisiere q mit allen Knoten, die keine eingehende Kante haben (Quellen)
- nimm nächsten Knoten v aus q und
  markiere alle $(v, w) \in E$, d.h. dekrementiere Zähler für w
- falls der Zähler von w dabei Null wird, füge w in q ein
- wiederhole das, bis q leer wird

Kürzeste Wege in DAGs

Topologische Sortierung

Korrektheit

- Knoten wird erst dann nummeriert, wenn alle Vorgänger nummeriert sind

Laufzeit

- für die Anfangswerte der Zähler muss der Graph einmal traversiert werden $O(n + m)$
- danach wird jede Kante genau einmal betrachtet

$\Rightarrow$ gesamt: $O(n + m)$

Test auf DAG-Eigenschaft

- topologische Sortierung erfasst genau dann alle Knoten, wenn der Graph ein DAG ist
- bei gerichteten Kreisen erhalten diese Knoten keine Nummer

Kürzeste Wege in DAGs

DAG-Strategie

1. Topologische Sortierung der Knoten
   Laufzeit $O(n + m)$
2. Aktualisierung der Distanzen gemäß der topologischen Sortierung
   Laufzeit $O(n + m)$

Gesamtlaufzeit: $O(n + m)$

Beliebige Graphen mit nicht-negativen Gewichten

Gegeben:

- beliebiger Graph
  (gerichtet oder ungerichtet, muss diesmal kein DAG sein)
- mit nicht-negativen Kantengewichten

$\Rightarrow$ keine Knoten mit Distanz $-\infty$

Problem:

- besuche Knoten eines kürzesten Weges in der richtigen Reihenfolge
- wie bei Breitensuche, jedoch diesmal auch mit Distanzen $\neq 1$

Lösung:

- besuche Knoten in der Reihenfolge der kürzesten Distanz zum Startknoten s

Kürzeste Pfade: SSSP / Dijkstra

Algorithmus Dijkstra1: löst SSSP-Problem

Eingabe : $G = (V, E)$, $c : E \mapsto \mathbb{R}$, $s \in V$
Ausgabe : Distanzen $d(s, v)$ zu allen $v \in V$

$P = \emptyset$; $T = V$;
$d(s, v) = \infty$ for all $v \in V \setminus s$;
$d(s, s) = 0$; $pred(s) = \perp$;
while $P \neq V$ **do**
  $v = \text{argmin}_{v \in T}\{d(s, v)\}$;
  $P = P \cup v$; $T = T \setminus v$;
  forall the $(v, w) \in E$ **do**
    if $d(s, w) > d(s, v) + c(v, w)$ **then**
      $d(s, w) = d(s, v) + c(v, w)$;
      $pred(w) = v$;

Algorithmus Dijkstra2: löst SSSP-Problem

Eingabe : $G = (V, E)$, $c : E \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$, $s \in V$
Ausgabe : Distanzen $d[v]$ von s zu allen $v \in V$

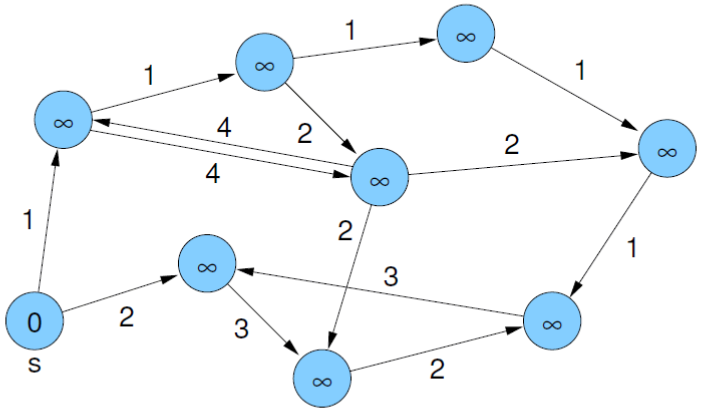
$d[v] = \infty$ for all $v \in V \setminus s$;
$d[s] = 0$; $pred[s] = \perp$;
$pq = \langle\rangle$; pq.insert$(s, 0)$;
while $\neg pq.empty()$ **do**
  $v = pq$.deleteMin();
  forall the $(v, w) \in E$ **do**
    newDist $= d[v] + c(v, w)$;
    if *newDist* $< d[w]$ **then**
      $pred[w] = v$;
      if $d[w] == \infty$ **then** pq.insert$(w,$ newDist$)$;
      else pq.decreaseKey$(w,$ newDist$)$;
      $d[w] =$ newDist;

Dijkstra-Algorithmus

- setze Startwert $d(s, s) = 0$ und zunächst $d(s, v) = \infty$
- verwende Prioritätswarteschlange, um die Knoten zusammen mit ihren aktuellen Distanzen zuspeichern
- am Anfang nur Startknoten (mit Distanz 0) in Priority Queue
- dann immer nächsten Knoten v (mit kleinster Distanz) entnehmen, endgültige Distanz dieses Knotens v steht nun fest
- betrachte alle Nachbarn von v,
  füge sie ggf. in die PQ ein bzw.
  aktualisiere deren Priorität in der PQ

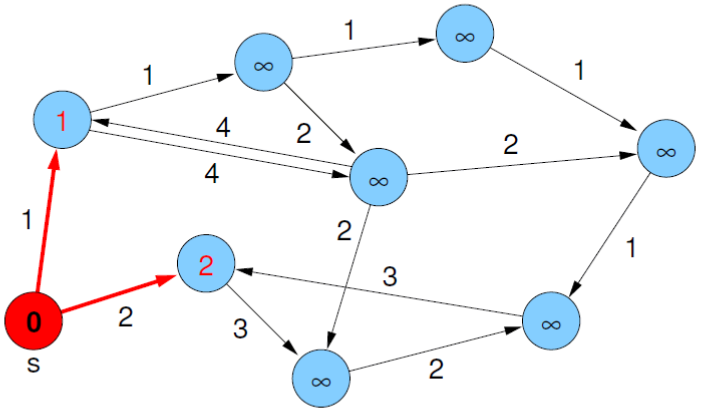
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



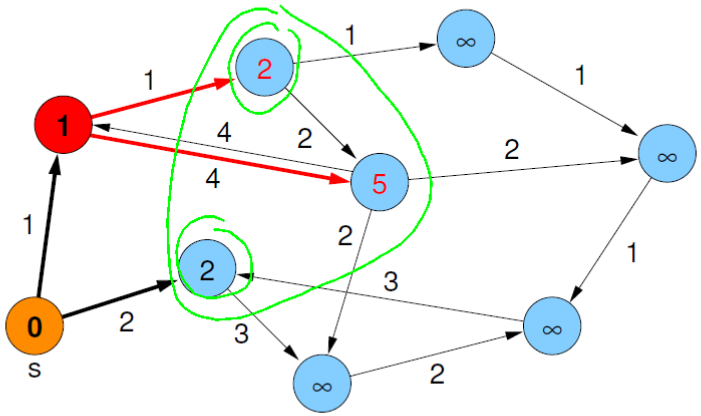
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



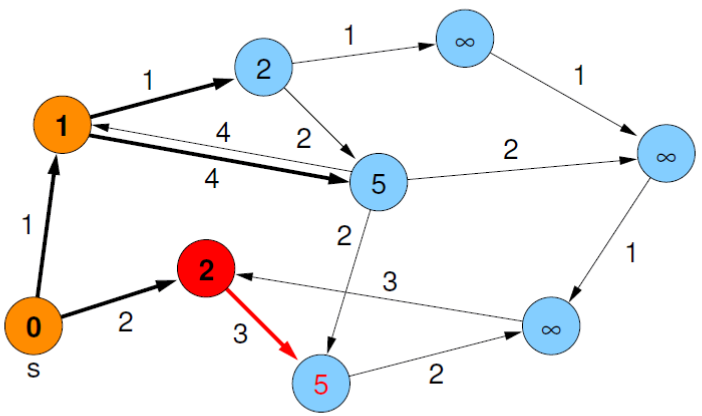
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



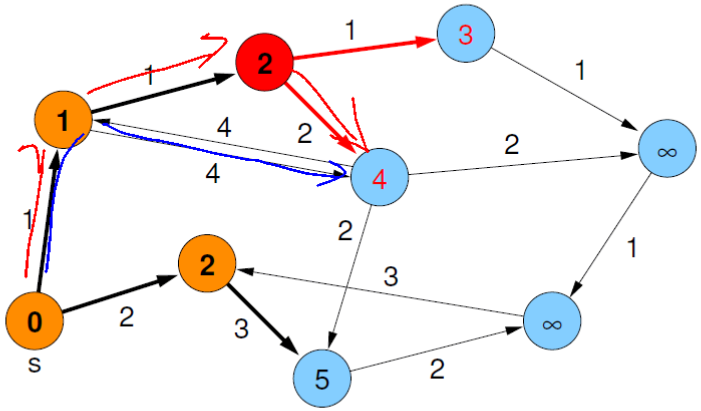
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



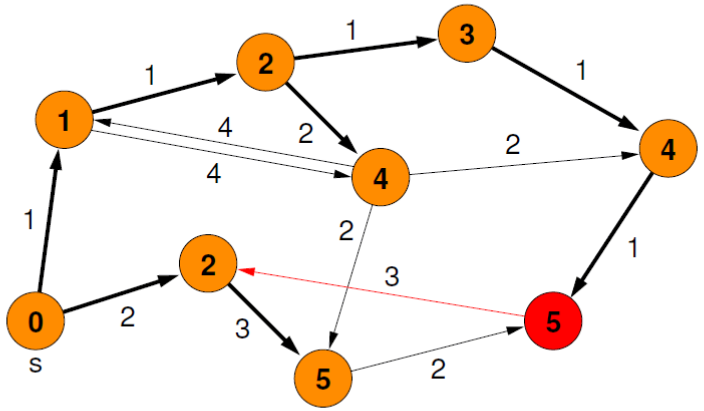
Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



Dijkstra-Algorithmus

Beispiel:



Dijkstra-Algorithmus

Korrektheit:

- Annahme: Algorithmus liefert für w einen zu kleinen Wert $d(s, w)$
- sei w der erste Knoten, für den die Distanz falsch festgelegt wird (kann nicht s sein, denn die Distanz $d(s, s)$ bleibt immer 0)
- kann nicht sein, weil $d(s, w)$ nur dann aktualisiert wird, wenn man über einen von s schon erreichten Knoten v mit Distanz $d(s, v)$ den Knoten w über die Kante (v, w) mit Distanz $d(s, v) + c(v, w)$ erreichen kann
- d.h. $d(s, v)$ müsste schon falsch gewesen sein (Widerspruch zur Annahme, dass w der erste Knoten mit falscher Distanz war)

Dijkstra-Algorithmus

- Annahme: Algorithmus liefert für w einen zu großen Wert $d(s, w)$
- sei w der Knoten mit der kleinsten (wirklichen) Distanz, für den der Wert $d(s, w)$ falsch festgelegt wird (wenn es davon mehrere gibt, der Knoten, für den die Distanz zuletzt festgelegt wird)
- kann nicht sein, weil $d(s, w)$ immer aktualisiert wird, wenn man über einen von s schon erreichten Knoten v mit Distanz $d(s, v)$ den Knoten w über die Kante (v, w) mit Distanz $d(s, v) + c(v, w)$ erreichen kann (dabei steht $d(s, v)$ immer schon fest, so dass auch die Länge eines kürzesten Wegs über v zu w richtig berechnet wird)
- d.h., entweder wurde auch der Wert von v falsch berechnet (Widerspruch zur Def. von w) oder die Distanz von v wurde noch nicht festgesetzt
- weil die berechneten Distanzwerte monoton wachsen, kann letzteres nur passieren, wenn v die gleiche Distanz hat wie w (auch Widerspruch zur Def. von w)

Dijkstra-Algorithmus

- Datenstruktur: Prioritätswarteschlange
  (z.B. Fibonacci Heap: amortisierte Komplexität $O(1)$ für `insert` und `decreaseKey`, $O(\log n)$ `deleteMin`)
- Komplexität:
  - $n \times O(1)$ `insert`
  - $n \times O(\log n)$ `deleteMin`
  - $m \times O(1)$ `decreaseKey`

  $\Rightarrow O(m + n \log n)$
- aber: nur für nichtnegative Kantengewichte(!)

Monotone Priority Queues

Beobachtung:

- aktuelles Distanz-Minimum der verbleibenden Knoten ist beim Dijkstra-Algorithmus monoton wachsend

Monotone Priority Queue

- Folge der entnommenen Elemente hat monoton steigende Werte
- effizientere Implementierung möglich, falls Kantengewichte ganzzahlig

Annahme: alle Kantengewichte im Bereich $[0, C]$

Konsequenz für Dijkstra-Algorithmus:

$\Rightarrow$ enthaltene Distanzwerte immer im Bereich $[d, d + C]$