Script **generated by TTT**

Title: Nipkow: Theo (09.05.2019)

Date: Thu May 09 14:14:35 CEST 2019

Duration: 82:04 min

Pages: 117

3.9 Pumping Lemma

Oder: *Wie zeigt man, dass eine Sprache nicht regulär ist?*

Satz 3.30 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$,
- $|uv| \leq n$, *und*
- $\forall i \geq 0.\ uv^iw \in R$.

- Die logische Struktur des Satzes:

  $\forall$*reg.* R. $\exists n > 0$.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.31

Die Sprache $\{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

Angenommen, L sei doch regulär.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.31
Die Sprache $\{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^nb^n \in L$.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.31
Die Sprache $\{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^nb^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in uvw mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.31
Die Sprache $\{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^nb^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in $u\cancel{v}w$ mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.
Damit müsste gelten $a^{n-|v|}b^n = uw \in L$. ↯ $\square$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.31
Die Sprache $\{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^nb^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in uvw mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.
Damit müsste gelten $a^{n-|v|}b^n = uw \in L$. ↯ $\square$

"Endliche Automaten können nicht unbegrenzt zählen"

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^n b^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in uvw mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.
Damit müsste gelten $a^{n-|v|} b^n = uw \in L$. ↯ □

"Endliche Automaten können nicht unbegrenzt zählen"

Ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \leq 10^6\}$ regulär?

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^l w \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^l w \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$.D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^l w \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$.D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw|$$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^l w \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$.D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w|$$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^l w \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$.D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1$$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ ist nicht regulär.

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$.D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Denn zwischen n^2 und $(n+1)^2$ liegt keine Quadratzahl. □

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.33
Die Sprache der balancierten Klammer-Ausdrücke über $\{(,)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:
Aufgabe. □

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.33
Die Sprache der balancierten Klammer-Ausdrücke über $\{(,)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:
Aufgabe. □

Satz 3.34
Die Sprache $Arith$ der arithmetischen Ausdrücken ist nicht regulär.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.33
Die Sprache der balancierten Klammer-Ausdrücke über $\{(,)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:
Aufgabe. □

Satz 3.34
Die Sprache $Arith$ der arithmetischen Ausdrücken ist nicht regulär.

Beweis:
Angenommen, $Arith$ sei doch regulär.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 3.33
Die Sprache der balancierten Klammer-Ausdrücke über $\{(,)\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Aufgabe. □

Satz 3.34
Die Sprache $Arith$ *der arithmetischen Ausdrücken ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, $Arith$ sei doch regulär.
Dann gibt es einen DFA A mit $L(A) = Arith$.
Ersetze alle Transitionen von A, die nicht mit (oder) beschriftet sind durch ϵ-Transitionen.
Der resultierende ϵ-NFA erkennt die Sprache der balancierten Klammer-Ausdrücke. Widerspruch zu Satz 3.33. □

Bemerkung

Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt!

Bemerkung

Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt!

⇒ Pumping-Lemma hinreichend aber nicht notwendig um Nicht-Regularität zu zeigen.

3.10 Entscheidungsverfahren

Wir untersuchen Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen,

3.10 Entscheidungsverfahren

Wir untersuchen Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen, d.h. Probleme der Gestalt

Eingabe: Ein oder mehrere Objekte, die reguläre Sprachen beschreiben (DFA, NFA, RE, Typ 3 Gram., ...)
Frage: Haben diese Objekte eine Eigenschaft X?

3.10 Entscheidungsverfahren

Wir untersuchen Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen, d.h. Probleme der Gestalt

Eingabe: Ein oder mehrere Objekte, die reguläre Sprachen beschreiben (DFA, NFA, RE, Typ 3 Gram., ...)
Frage: Haben diese Objekte eine Eigenschaft X?

Ein (Entscheidungs)Problem ist entscheidbar wenn es einen Algorithmus gibt, der bei jeder Eingabe in endlicher Zeit die richtige Antwort gibt.

3.10 Entscheidungsverfahren

Wir untersuchen Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen, d.h. Probleme der Gestalt

Eingabe: Ein oder mehrere Objekte, die reguläre Sprachen beschreiben (DFA, NFA, RE, Typ 3 Gram., ...)
Frage: Haben diese Objekte eine Eigenschaft X?

Ein (Entscheidungs)Problem ist entscheidbar wenn es einen Algorithmus gibt, der bei jeder Eingabe in endlicher Zeit die richtige Antwort gibt.

In der zweiten Hälfte der Vorlesung wird gezeigt, dass nicht alle Entscheidungsprobleme für Grammatiken enstcheidbar sind!

3.10 Entscheidungsverfahren

Wir untersuchen Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen, d.h. Probleme der Gestalt

Eingabe: Ein oder mehrere Objekte, die reguläre Sprachen beschreiben (DFA, NFA, RE, Typ 3 Gram., ...)
Frage: Haben diese Objekte eine Eigenschaft X?

Ein (Entscheidungs)Problem ist entscheidbar wenn es einen Algorithmus gibt, der bei jeder Eingabe in endlicher Zeit die richtige Antwort gibt.

In der zweiten Hälfte der Vorlesung wird gezeigt, dass nicht alle Entscheidungsprobleme für Grammatiken enstcheidbar sind!

Welche Entscheidungsprobleme sind für rechtslineare Grammatiken (oder DFA; NFA; RE ...) entscheidbar?

3.10 Entscheidungsverfahren

Wir untersuchen Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen, d.h. Probleme der Gestalt

Eingabe: Ein oder mehrere Objekte, die reguläre Sprachen beschreiben (DFA, NFA, RE, Typ 3 Gram., ...)
Frage: Haben diese Objekte eine Eigenschaft X?

Ein (Entscheidungs)Problem ist entscheidbar wenn es einen Algorithmus gibt, der bei jeder Eingabe in endlicher Zeit die richtige Antwort gibt.

In der zweiten Hälfte der Vorlesung wird gezeigt, dass nicht alle Entscheidungsprobleme für Grammatiken enstcheidbar sind!

Welche Entscheidungsprobleme sind für rechtslineare Grammatiken (oder DFA; NFA; RE ...) entscheidbar?

Wie hängt die Laufzeit des Algorithmus mit der Beschreibung zusammen?

Definition 3.35
Sei D ein DFA, NFA, RE, rechtslineare Grammatik ....

Wortproblem: Gegeben w und D, gilt $w \in L(D)$?
Leerheitsproblem: Gegeben D, gilt $L(D) = \emptyset$?

Lemma 3.36
Das Wortproblem ist für ein Wort w und DFA M in Zeit $O(|w| + |M|)$ entscheidbar.

Lemma 3.36
Das Wortproblem ist für ein Wort w und DFA M in Zeit $O(|w| + |M|)$ entscheidbar.

Lemma 3.37
Das Wortproblem ist für ein Wort w und NFA N in Zeit $O(\underbrace{|Q|^2|w|} + |N|)$ entscheidbar.

Lemma 3.36

Das Wortproblem ist für ein Wort w und DFA M in Zeit $O(|w| + |M|)$ entscheidbar.

Lemma 3.37

Das Wortproblem ist für ein Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w| + |N|)$ entscheidbar.

Beweis:
Sei $Q = \{1, \ldots, s\}$, $q_0 = 1$ und $w = a_1 \ldots a_n$.

Lemma 3.36

Das Wortproblem ist für ein Wort w und DFA M in Zeit $O(|w| + |M|)$ entscheidbar.

Lemma 3.37

Das Wortproblem ist für ein Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w| + |N|)$ entscheidbar.

Beweis:
Sei $Q = \{1, \ldots, s\}$, $q_0 = 1$ und $w = a_1 \ldots a_n$.

$S := \{1\}$
for $i := 1$ **to** n **do** $S := \bigcup_{j \in S} \delta(j, a_i)$
return $(S \cap F \neq \emptyset)$

$|Q|$

□

Lemma 3.38

Das Leerheitsproblem ist für DFAs und NFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q||\Sigma|)$ bzw $O(|Q|^2|\Sigma|)$).

Lemma 3.38

Das Leerheitsproblem ist für DFAs und NFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q||\Sigma|)$ bzw $O(|Q|^2|\Sigma|)$).

Beweis:
$L(M) = \emptyset$ gdw kein Endzustand von q_0 erreichbar ist.

Lemma 3.38

Das Leerheitsproblem ist für DFAs und NFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q||\Sigma|)$ bzw $O(|Q|^2|\Sigma|)$).

Beweis:

$L(M) = \emptyset$ gdw kein Endzustand von q_0 erreichbar ist.
Dies ist eine einfache Suche in einem Graphen, die jede Kante maximal ein Mal benutzen muss.

Lemma 3.38

Das Leerheitsproblem ist für DFAs und NFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q||\Sigma|)$ bzw $O(|Q|^2|\Sigma|)$).

Beweis:

$L(M) = \emptyset$ gdw kein Endzustand von q_0 erreichbar ist.
Dies ist eine einfache Suche in einem Graphen, die jede Kante maximal ein Mal benutzen muss.
Ein NFA hat $\leq |Q|^2|\Sigma|$ Kanten, ein DFA hat $\leq |Q||\Sigma|$ Kanten. □

Lemma 3.38

Das Leerheitsproblem ist für DFAs und NFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q||\Sigma|)$ bzw $O(|Q|^2|\Sigma|)$).

Beweis:

$L(M) = \emptyset$ gdw kein Endzustand von q_0 erreichbar ist.
Dies ist eine einfache Suche in einem Graphen, die jede Kante maximal ein Mal benutzen muss.
Ein NFA hat $\leq |Q|^2|\Sigma|$ Kanten, ein DFA hat $\leq |Q||\Sigma|$ Kanten. □

Ist Σ fix, z.B. ASCII, so wird daraus $O(|Q|^2)$ bzw $O(|Q|)$.

Lemma 3.39

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Lemma 3.39

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

Lemma 3.39

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$

Lemma 3.39

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) = \quad R := Reach(\{q_0\})$

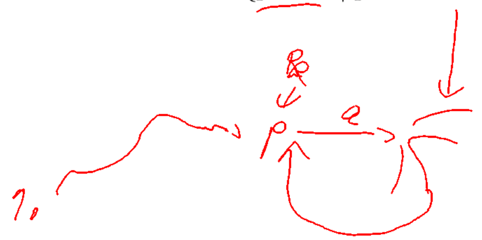
Lemma 3.39

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$$Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) = \quad \begin{array}{l} R := Reach(\{q_0\}) \\ C := \{\underline{p \in R} \mid p \in Reach(\underline{\bigcup_{a\in\Sigma} \delta(p,a)})\} \end{array}$$



Lemma 3.39
Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$\bar{\imath}_4$ $Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$ $R := Reach(\{q_0\})$
$C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a\in\Sigma} \delta(p, a))\}$
return $(Reach(C) \cap F = \emptyset)$

Lemma 3.39
Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$ $R := Reach(\{q_0\})$
$C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a\in\Sigma} \delta(p, a))\}$
return $(Reach(C) \cap F = \emptyset)$

$Reach(K) =$ $R := \emptyset$; $W := K$

Lemma 3.39
Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$ $R := Reach(\{q_0\})$
$C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a\in\Sigma} \delta(p, a))\}$
return $(Reach(C) \cap F = \emptyset)$

$Reach(K) =$ $R := \emptyset$; $W := K$
while $W \neq \emptyset$ **do**

Lemma 3.39
Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$ $R := Reach(\{q_0\})$
$C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a\in\Sigma} \delta(p, a))\}$
return $(Reach(C) \cap F = \emptyset)$

$Reach(K) =$ $R := \emptyset$; $W := K$
while $W \neq \emptyset$ **do**
pick and remove some $p \in W$
if $p \notin R$ **then**

Lemma 3.39

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$$
\begin{array}{ll}
Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) = & R := Reach(\{q_0\}) \\
& C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a))\} \\
& \textbf{return } (Reach(C) \cap F = \emptyset)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Reach(K) = & R := \emptyset;\ W := K \\
& \textbf{while } W \neq \emptyset \textbf{ do} \\
& \quad \text{pick and remove some } p \in W \\
& \quad \textbf{if } p \notin R \textbf{ then} \\
& \qquad R := R \cup \{p\};\ W := W \cup \underbrace{\bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a)}
\end{array}
$$

Lemma 3.39

Das Endlichkeitsproblem ist für DFAs oder NFAs entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist.

$$
\begin{array}{ll}
Finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) = & R := Reach(\{q_0\}) \\
& C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a))\} \\
& \textbf{return } (Reach(C) \cap F = \emptyset)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Reach(K) = & R := \emptyset;\ W := K \\
& \textbf{while } W \neq \emptyset \textbf{ do} \\
& \quad \text{pick and remove some } p \in W \\
& \quad \textbf{if } p \notin R \textbf{ then} \\
& \qquad R := R \cup \{p\};\ W := W \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a) \\
& \textbf{return } R
\end{array}
$$

□

Lemma 3.40

Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

Lemma 3.40

Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

Beweis:

Folgt direkt aus

$$
\begin{array}{lcl}
L_1 \subseteq L_2 & \Leftrightarrow & L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset \\
L_1 = L_2 & \Leftrightarrow & L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_1
\end{array}
$$

Lemma 3.40
Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

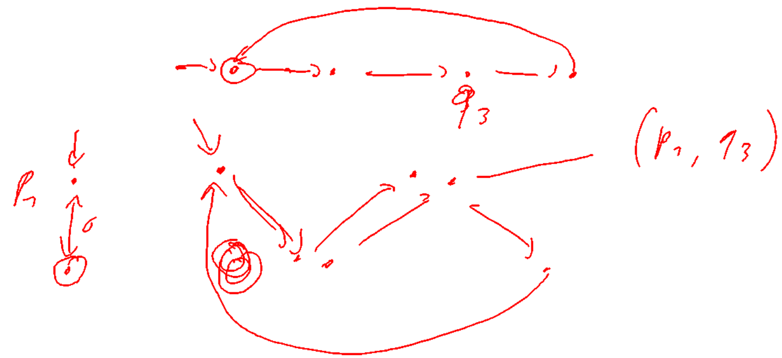
Beweis:
Folgt direkt aus

$$
\begin{aligned}
L_1 \subseteq L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset \\
L_1 = L_2 \quad &\Leftrightarrow \quad L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_1
\end{aligned}
$$

da für DFAs Komplement und Durchschnitt wieder endliche Automaten liefern und das Leerheitsproblem für endliche Automaten entscheidbar ist. □

$L((aaaa)^*) \subseteq L((aa)^*)$

$L((aaaa)^*) \subseteq L((aa)^*)$



$L(a^{4k}) \cap \overline{L(a^{2k})} = \emptyset$

$L((aaaa)^*) \subseteq L((aa)^*)$

Satz 3.41
Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$ entscheidbar.

Beweis:
Gegeben: DFAs M_1 mit m und M_2 mit n Zuständen.

(p_1, q_3)

$$L(a^{4^*}) \cap \overline{L(a^{2^*})} = \emptyset$$

Satz 3.41
Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2||\Sigma|)$ entscheidbar.

Beweis:
Gegeben: DFAs M_1 mit m und M_2 mit n Zuständen.
Mit Hilfe der Produkt-Konstruktion für $\cap$ folgt:

	Anzahl der Zustände
$L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$	mn
$\overline{L(M_1)} \cap L(M_2)$	mn

□

Korollar 3.42
Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis:
2 NFAs mit m und n Zuständen $\leadsto$

Korollar 3.42
Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis:
2 NFAs mit m und n Zuständen $\leadsto$
2 DFAs mit 2^m und 2^n Zuständen $\leadsto$
Äquivalenztest in Zeit $O(2^m 2^n)$ □

Korollar 3.43
Das Äquivalenzproblem für reguläre Ausdrücke ist entscheidbar.

Fazit:

Die Kodierung der Eingabe (DFA, NFA, RE, ...) kann entscheidend für die Komplexität eines Problems sein.

$1^*1 \equiv 11^*$

Korollar 3.42

Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis:

2 NFAs mit m und n Zuständen $\leadsto$
2 DFAs mit 2^m und 2^n Zuständen $\leadsto$
Äquivalenztest in Zeit $O(2^m 2^n)$ $\square$

Korollar 3.43

Das Äquivalenzproblem für reguläre Ausdrücke ist entscheidbar.

$1^*1 \equiv 11^*$

3.11 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

Gilt $XX^* \equiv X^*X$ für alle X?

3.11 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

Gilt $XX^* \equiv X^*X$ für alle X?

sondern *Lösen*:

Für welches X gilt $X \equiv aX \mid b$?

3.11 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

$$\text{Gilt } XX^* \equiv X^*X \text{ für alle } X?$$

sondern *Lösen*:

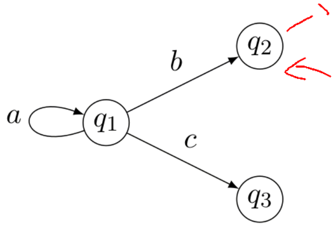
$$\text{Für welches } X \text{ gilt } X \equiv aX \mid b \text{ ?}$$

Anwendung:

$$\text{Automat} \rightsquigarrow \text{Gleichungssystem} \rightsquigarrow \text{RE}$$

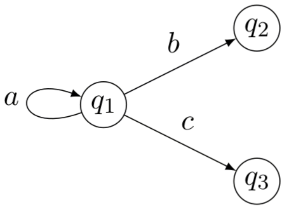
Beispiel 3.44

Ein Automatenfragment:



Beispiel 3.44

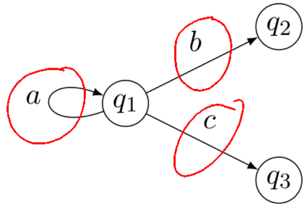
Ein Automatenfragment:



$$L_i := \{w \mid \hat\delta(q_i, w) \in F\}$$

Beispiel 3.44

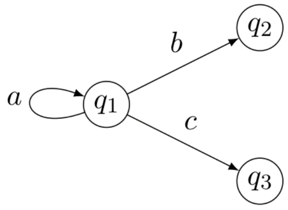
Ein Automatenfragment:



$$L_i := \{w \mid \hat\delta(q_i, w) \in F\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$L_1 = \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \cup \{c\}L_3$$

Beispiel 3.44

Ein Automatenfragment:



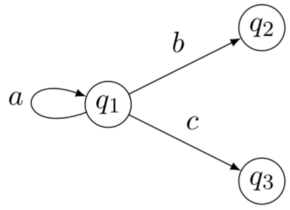
$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$L_1 = \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \cup \{c\}L_3$$

Da die L_i regulär sein müssen, arbeiten wir direkt mit REs:

$$X_1 \equiv aX_1 \mid bX_2 \mid cX_3$$

Beispiel 3.44

Ein Automatenfragment:



$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$L_1 = \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \cup \{c\}L_3$$

Da die L_i regulär sein müssen, arbeiten wir direkt mit REs:

$$X_1 \equiv aX_1 \mid bX_2 \mid cX_3$$

Lösung X_i ist RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

Satz 3.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 3.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^*\beta$$

Satz 3.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 3.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^*\beta$$

Bemerkungen

- $X = \{\epsilon\}X \cup B$ hat keine eindeutige Lösung:

Satz 3.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 3.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^* \beta$$

Bemerkungen

- $X = \{\epsilon\}X \cup B$ hat keine eindeutige Lösung:
  jede Sprache $X \supseteq B$ ist Lösung.

Satz 3.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 3.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^* \beta$$

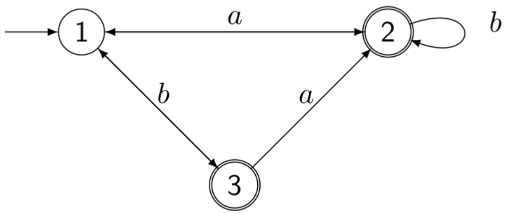
Bemerkungen

- $X = \{\epsilon\}X \cup B$ hat keine eindeutige Lösung:
  jede Sprache $X \supseteq B$ ist Lösung.
- $X \equiv aXb \mid \epsilon$ hat keine *reguläre* Lösung.

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 3.47

$X_1 =$

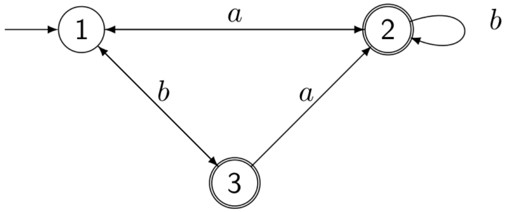


$X_1 = aX_2 \mid bX_3$

$X_1 = aX_2 \mid bX_3$

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 3.47



$X_1 = aX_2 \mid bX_3$

$X_2 = bX_2 \mid aX_1$

$X_1 = aX_2 \mid bX_3$

$X_2 = bX_2 \mid aX_1$

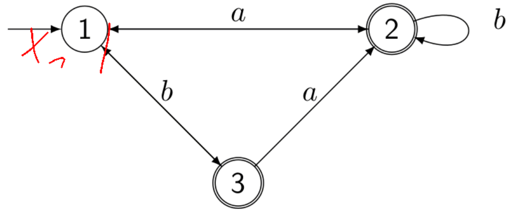
Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 3.47

$X_1 = aX_2 \mid bX_3$

$X_2 = bX_2 \mid aX_1$

$X_3 = aX_1 \mid$



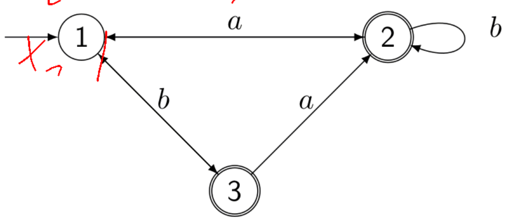
$X_1 = aX_2 \mid bX_3$

$X_2 = bX_2 \mid aX_1$

$X_3 = aX_1 \mid$

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 3.47



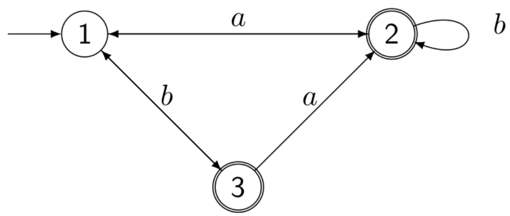
Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 3.47



Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$X_2 = \alpha X_2 \mid \beta$

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv \underline{aX_1 \mid bX_2 \mid \epsilon} \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Löse $X_2 \equiv \underline{\overset{\alpha}{b}X_2 \mid (\overbrace{aX_1 \mid \epsilon}^{\beta})}$ nach X_2 auf:

$$X_2 \equiv b^*$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$ nach X_2 auf:

$$X_2 \equiv b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$ nach X_2 auf:

$$X_2 \equiv \underline{b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})}$$

Zurück einsetzen:

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$ nach X_2 auf:

$$X_2 \equiv b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$$

Zurück einsetzen:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid bX_3 \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und X_i ausklammern:

$$X_1 \equiv$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$ nach X_2 auf:

$$X_2 \equiv b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$$

Zurück einsetzen:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid bX_3 \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und X_i ausklammern:

$$X_1 \equiv ab^*aX_1$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$ nach X_2 auf:

$$X_2 \equiv b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$$

Zurück einsetzen:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid bX_3 \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und X_i ausklammern:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid ab^* \mid bX_3 \\ X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid bX_3 \mid ab^* \\ X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid bX_3 \mid ab^* \\ X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

X_3 ist gelöst, in 1. Gleichung einsetzen:

$$X_1 \equiv ab^*aX_1 \mid b((b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid ab^*$$

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid bX_3 \mid ab^* \\ X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

X_3 ist gelöst, in 1. Gleichung einsetzen:

$$X_1 \equiv ab^*aX_1 \mid b((b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid ab^*$$

Ausmultiplizieren und X_1 ausklammern:

$$X_1 \equiv$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid bX_3 \mid ab^* \\
X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}
\end{aligned}
$$

X_3 ist gelöst, in 1. Gleichung einsetzen:

$$X_1 \equiv ab^*aX_1 \mid b((b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid ab^*$$

Ausmultiplizieren und X_1 ausklammern:

$$X_1 \equiv (ab^*a \mid bb \mid bab^*a)X_1 \mid \underbrace{bab^* \mid b \mid ab^*}_{\beta}$$

α

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid bX_3 \mid ab^* \\
X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}
\end{aligned}
$$

X_3 ist gelöst, in 1. Gleichung einsetzen:

$$X_1 \equiv ab^*aX_1 \mid b((b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid ab^*$$

Ausmultiplizieren und X_1 ausklammern:

$$X_1 \equiv (ab^*a \mid bb \mid bab^*a)X_1 \mid \underbrace{bab^* \mid b \mid ab^*}$$

Nach X_1 auflösen:

$$X_1 \equiv \qquad 0$$

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &:= c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1, \ldots, c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\} \\
& \text{wobei } a_{ij} := \emptyset \text{ falls } q_i \xrightarrow{c} q_j \text{ für kein } c \in \Sigma
\end{aligned}
$$

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$a_{ij} \;:=\; c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1,\dots,c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\}$$

wobei $a_{ij} := \emptyset$ falls $q_i \xrightarrow{c} q_j$ für kein $c \in \Sigma$

$$b_i \;:=\; \begin{cases} \epsilon & \text{falls } q_i \in F \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$a_{ij} \;:=\; c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1,\dots,c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\}$$

wobei $a_{ij} := \emptyset$ falls $q_i \xrightarrow{c} q_j$ für kein $c \in \Sigma$

$$b_i \;:=\; \begin{cases} \epsilon & \text{falls } q_i \in F \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

- Löse das System durch schrittweise Elimination von Variablen mit Hilfe von Ardens Lemma für REs (Korollar 3.46).

$$X_i = \alpha X_i \mid \beta$$

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$a_{ij} \;:=\; c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1,\dots,c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\}$$

wobei $a_{ij} := \emptyset$ falls $q_i \xrightarrow{c} q_j$ für kein $c \in \Sigma$

$$b_i \;:=\; \begin{cases} \epsilon & \text{falls } q_i \in F \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

- Löse das System durch schrittweise Elimination von Variablen mit Hilfe von Ardens Lemma für REs (Korollar 3.46).

- Ist k der Startzustand, so beschreibt X_k die vom Automaten akzeptierte Sprache.

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$X = A(AX \cup B) \cup B$$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$X = A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B$$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B \end{aligned}$$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \ldots \end{aligned}$$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \dots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$A^* B$

$$X = \boxed{A^{n+1}X} \cup \bigcup_{i \leq n} A^iB$$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \dots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^iB$$

0: Behauptung wird zu $X = AX \cup B$, der Annahme.

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \dots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$n+2$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n+1} A^iB$$

0: Behauptung wird zu $X = AX \cup B$, der Annahme.

$n+1$: $X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^iB$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \dots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^iB$$

0: Behauptung wird zu $X = AX \cup B$, der Annahme.

$$\begin{aligned} n+1: \quad X &= A^{n+1}X \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^iB \\ &= A^{n+1}(AX \cup B) \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^{i+1}B \end{aligned}$$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \ldots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

0: Behauptung wird zu $X = AX \cup B$, der Annahme.

$$\begin{aligned} n+1: \quad X &= A^{n+1}X \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^i B \\ &= A^{n+1}(AX \cup B) \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^{i+1} B \\ &= A^{n+2}X \cup A^{n+1}B \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^i B \end{aligned}$$

Beweis von Ardens Lemma:

Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3X \cup A^2B \cup AB \cup B = \ldots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B}$$

0: Behauptung wird zu $X = AX \cup B$, der Annahme.

$$\begin{aligned} n+1: \quad X &= A^{n+1}X \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^i B \\ &= A^{n+1}(AX \cup B) \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^{i+1} B \\ &= A^{n+2}X \cup A^{n+1}B \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^i B \\ &= A^{n+2}X \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n+1} A^i B \end{aligned}$$

$$X = A^{n+1}X \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^i B \qquad (*)$$

$$X = A^{n+1}X \cup \textstyle\bigcup_{i \leq n} A^i B \qquad (*)$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$$\begin{aligned} A^*B \subseteq X: \quad & w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B \\ & \implies \exists n.\ w \in A^n B \end{aligned}$$

$$X = A^{n+1}X \cup \boxed{\bigcup_{i \le n} A^iB} \qquad (*)$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^iB$

$$\implies \exists n.\ w \in A^nB$$

$$\implies w \in X$$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \le n} A^iB \qquad (*)$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^iB$

$$\implies \exists n.\ w \in A^nB$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$:

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \le n} A^iB \qquad (*)$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^iB$

$$\implies \exists n.\ w \in A^nB$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$: Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$$\epsilon \notin A$$

$$X = \cancel{A^{n+1}X} \cup \bigcup_{i \le n} A^iB \qquad (*)$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^iB$

$$\implies \exists n.\ w \in A^nB$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$: Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$$\epsilon \notin A$$

$$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \ge n+1$$

$$\implies w \notin A^{n+1}X$$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B \qquad (*)$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$\implies \exists n.\ w \in A^n B$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$$\epsilon \notin A$$

$$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \geq n+1$$

$$\implies w \notin A^{n+1}X$$

$$\implies w \in \bigcup_{i \leq n} A^i B \qquad \text{(wegen } (*)\text{)}$$

3.12 Minimierung endlicher Automaten

Wir zeigen, dass jede reguläre Sprache einen einzigen minimalen DFA hat und geben Algorithmen an, die diesen DFA konstruieren.

1. Beispiele
2. Algorithmen
3. Minimalitätsbeweis