

5.6 Die Entscheidbarkeit der Presburger Arithmetik

Script generated by TTT

Title: seidl: Theoretische_Informatik (16.07.2012)

Date: Mon Jul 16 10:15:20 CEST 2012

Duration: 72:01 min

Pages: 36



5.6 Die Entscheidbarkeit der Presburger Arithmetik

Syntax der Presburger Arithmetik:

Variablen: $V \rightarrow x | y | z | \dots$

Zahlen: $N \rightarrow 0 | 1 | 2 | \dots$

Terme: $T \rightarrow V | N | T + T$

Formeln: $F \rightarrow (T = T) | \neg F | (F \wedge F) | (F \vee F)$
 $| \exists V. F$

$$x > y \iff \exists z. x = y + z + 1$$

5.6 Die Entscheidbarkeit der Presburger Arithmetik

Syntax der Presburger Arithmetik:

Variablen: $V \rightarrow x | y | z | \dots$

Zahlen: $N \rightarrow 0 | 1 | 2 | \dots$

Terme: $T \rightarrow V | N | T + T$

Formeln: $F \rightarrow (T = T) | \neg F | (F \wedge F) | (F \vee F)$
 $| \exists V. F$

Wir betrachten $\forall x. F$ als Abk. für $\neg \exists x. \neg F$.

Satz 5.51

Für Sätze der Presburger Arithmetik ist entscheidbar, ob sie wahr sind.

 **Mojzesz Presburger.**


Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. 1929.

 **Mojzesz Presburger.**

Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. 1929.

Mojzesz Presburger 1904 – 1943

YAD VASHEM
The Holocaust Martyrs' and Heroes' Remembrance Authority
Hall of Names - P.O.B. 3477, Jerusalem 91034 www.yadvashem.org



יד ושם
רשות הזיכרון לשואה ולגבורה
היכל השמות - ת.ד. 3477, ירושלים 91034

Page of Testimony דף עד

עד לרישום והצגה של הנסמים בשואה; נא למלא דף עבור כל ניספה בנפרד, בכתב ברור ובאותיות דפוס.
Page of Testimony for commemoration of the Jews who perished during the Shoah; please submit a separate form for each victim, in block capitals.

חוק יסודי תשנ"ה והגדרה - חסי 1953 קבע בפניו פ"י 2 כי יתקיימו על ידי ועם הוא לטעון אל הוועדה או ועד של כל אלה מבי הם יהודי עולם השני
אז משם, למצוא ומרד כאוב התנאי ונחזור ולהביא עם וחד לוג, לקהילות, למוסדות והמוסדות שחיו בו בלל המיינסטרים לים יהודי
The Martyrs' and Heroes' Remembrance Law 5715-1953 determines in section 2 that: "The task of Yad Vashem is to gather into the permanent material regarding all those members of the Jewish people who laid down their lives, who fought and resisted against the Nazi enemy and his collaborators, and to perpetuate their names and those of the communities, organizations and institutions which were destroyed because they were Jewish".

Maiden name: שם משפחה לפני הנישואין: Victim's family name: שם משפחה של הניספה: **PRESBURGER**

Previous/other family name: שם משפחה קודם/אחר: First name (also nickname): שם פרטי (גם שם חברה/כינוי): **MOJZESZ O MIETEK ?**

Approx. age at death: גיל משוער בעת המוות: **43** Date of birth: תאריך לידה: **1904** Gender: מין: **M/F** Title: תואר: **philosopher**

Nationality: תרבות: **POLISH** Country: ארץ: **POLAND** Region: מרחב: **?** Place of birth: מקום לידה: **?**

Victim's father: Family name: שם משפחה: First name: שם פרטי: **אב**
השפחה:

Vereinfachte Presburger Formeln:

$$\phi ::= x + y = z \mid x = n \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \neg \phi \mid \exists x. \phi$$

Vereinfachte Presburger Formeln:

$$\phi ::= x + y = z \mid x = n \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \neg \phi \mid \exists x. \phi$$

Bemerkungen

- Durch sukzessive Addition kann man Multiplikation mit Konstanten simulieren.
(Wie?) ax

$$x + x = x_2$$

$$x_2 + x_2 = x_4$$

Vereinfachte Presburger Formeln:

$$\begin{aligned} \phi & ::= x + y = z \mid x = n \mid \\ & \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \neg \phi \mid \\ & \exists x. \phi \end{aligned}$$

Bemerkungen

- Durch sukzessive Addition kann man Multiplikation mit Konstanten simulieren.
(Wie?)
- Das Rucksackproblem lässt sich in PA ausdrücken.
(Wie?)

$$\exists x_1 \dots x_n. (x_1 > 0 \vee x_1 = 1) \wedge \dots \wedge (x_n > 0 \vee x_n = 1) \\ \wedge a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

Allgemeineres Ziel: PSAT

Finde Werte in \mathbb{N} für die freien Variablen, so dass ϕ gilt ...

Allgemeineres Ziel: PSAT

Finde Werte in \mathbb{N} für die freien Variablen, so dass ϕ gilt ...

Allgemeineres Ziel: PSAT

Finde Werte in \mathbb{N} für die freien Variablen, so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.
(Wie?)

Allgemeineres Ziel: **PSAT**
 Finde Werte in \mathbb{N} für die **freien Variablen**, so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:
 Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.
 (Wie?)

Allgemeineres Ziel: **PSAT**
 Finde Werte in \mathbb{N} für die **freien Variablen**, so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:
 Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.
 (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0
				z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	

Allgemeineres Ziel: **PSAT**
 Finde Werte in \mathbb{N} für die **freien Variablen**, so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:
 Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.
 (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Beobachtung:
 Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist **regulär** !!

$$\begin{aligned}
 \phi_1 \wedge \phi_2 &\implies \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) && \text{(Durchschnitt)} \\
 \neg \phi &\implies \overline{\mathcal{L}(\phi)} && \text{(Komplement)} \\
 \exists x : \phi &\implies \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) && \text{(Projektion)}
 \end{aligned}$$

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär !!

$$\begin{aligned} \phi_1 \wedge \phi_2 &\implies \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) && \text{(Durchschnitt)} \\ \neg \phi &\implies \overline{\mathcal{L}(\phi)} && \text{(Komplement)} \\ \exists x : \phi &\implies \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) && \text{(Projektion)} \end{aligned}$$

Achtung:

- Ein akzeptiertes Tupel kann immer durch führende Nullen verlängert werden !
- bleibt unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement erhalten !!

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär !!

$$\begin{aligned} \phi_1 \wedge \phi_2 &\implies \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) && \text{(Durchschnitt)} \\ \neg \phi &\implies \overline{\mathcal{L}(\phi)} && \text{(Komplement)} \\ \exists x : \phi &\implies \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) && \text{(Projektion)} \end{aligned}$$

Achtung:

- Ein akzeptiertes Tupel kann immer durch führende Nullen verlängert werden !
- bleibt unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement erhalten !!

Allgemeineres Ziel: PSAT

Finde Werte in \mathbb{N} für die freien Variablen, so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Weg-Projizierung der x-Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär !!

$$\begin{aligned}\phi_1 \wedge \phi_2 &\implies \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) && \text{(Durchschnitt)} \\ \neg \phi &\implies \overline{\mathcal{L}(\phi)} && \text{(Komplement)} \\ \exists x : \phi &\implies \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) && \text{(Projektion)}\end{aligned}$$

Achtung:

- Ein akzeptiertes Tupel kann immer durch führende Nullen verlängert werden !
- bleibt unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement erhalten !!
- Wie sieht das mit der Projektion aus ?


Weg-Projizierung der x -Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0

- Nun werden möglicherweise Tupel von Zahlen erst nach Anhängen von geeignet vielen führenden Nullen akzeptiert !

Weg-Projizierung der x -Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0



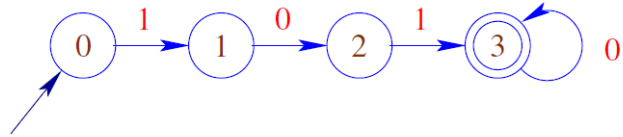
Weg-Projizierung der x -Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0

- Nun werden möglicherweise Tupel von Zahlen erst nach Anhängen von geeignet vielen führenden Nullen akzeptiert !
- Der Automat muss so komplettiert werden, dass q bereits akzeptierend ist, wenn von q aus mit Nullen ein akzeptierender Zustand erreicht werden kann.

Automaten für Basis-Prädikate:

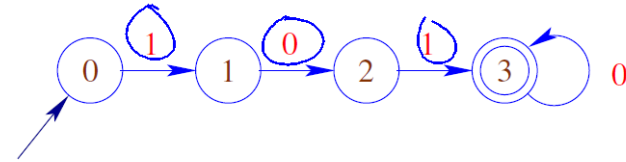
$$x = 5$$



Automaten für Basis-Prädikate:

101

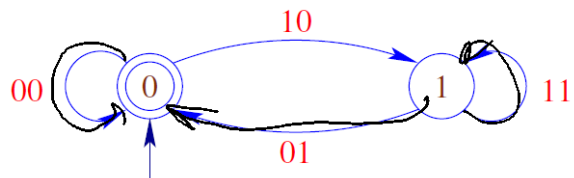
$$x = 5$$



Automaten für Basis-Prädikate:

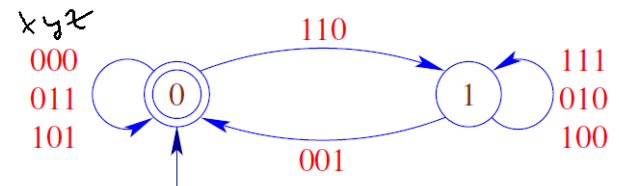
no
09

$$x+x = y$$

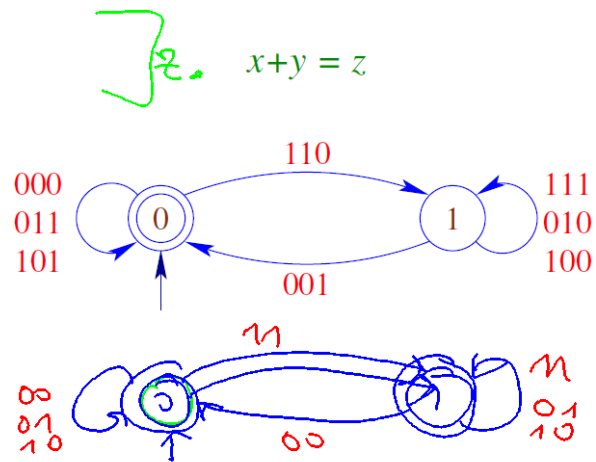


Automaten für Basis-Prädikate:

$$x+y = z$$



Automaten für Basis-Prädikate:



Beobachtung:

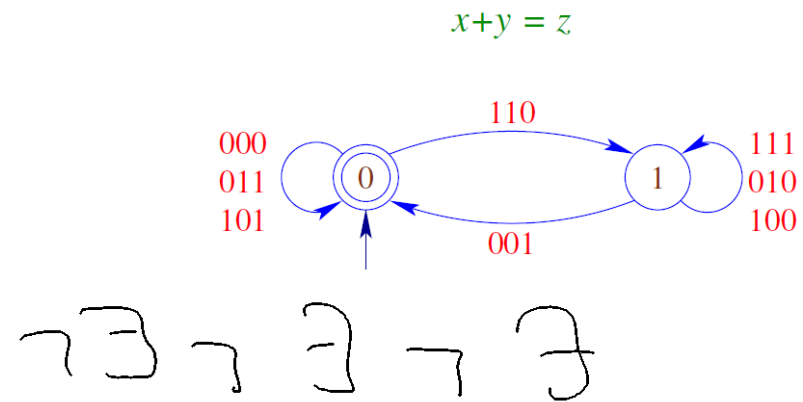
Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär !!

$\phi_1 \wedge \phi_2$	\implies	$\mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2)$	(Durchschnitt)
$\neg \phi$	\implies	$\overline{\mathcal{L}(\phi)}$	(Komplement)
$\exists x : \phi$	\implies	$\pi_x(\mathcal{L}(\phi))$	(Projektion)

Achtung:

- Ein akzeptiertes Tupel kann immer durch führende Nullen verlängert werden !
- bleibt unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement erhalten !!
- Wie sieht das mit der Projektion aus ?

Automaten für Basis-Prädikate:



Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff, 1973 : $\text{PSAT} \leq \text{DSpace}(2^{2^{c \cdot n}})$

Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 : $PSAT \leq DSPACE(2^{2^{c \cdot n}})$

Fischer, Rabin,1974 : $PSAT \geq NTIME(2^{2^{c \cdot n}})$

Informatik im Jahr 2100: Eine Vorhersage

Java 5 \rightsquigarrow Taiwan (Red Dragon Edition)

Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 : $PSAT \leq DSPACE(2^{2^{c \cdot n}})$

Fischer, Rabin,1974 : $PSAT \geq NTIME(2^{2^{c \cdot n}})$

Informatik im Jahr 2100: Eine Vorhersage

Java 5 \rightsquigarrow Taiwan (Red Dragon Edition)
Python \rightsquigarrow

Informatik im Jahr 2100: Eine Vorhersage

Java 5	↔	Taiwan (Red Dragon Edition)
Python	↔	Gnu-Boa++# 18.3
XML	↔	ZZ-TOP
Reguläre Sprachen	↔	Reguläre Sprachen
Berechenbare Funktionen	↔	Berechenbare Funktionen
P	↔	P