Script **generated by TTT**

Title: Seidl: Theoretische_Informatik (29.04.2013)

Date: Mon Apr 29 10:16:52 CEST 2013

Duration: 87:31 min

Pages: 91

Lemma 2.25

Assoziativität:

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma) \equiv \alpha \mid \beta \mid \gamma$
- $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma) \equiv \alpha\beta\gamma$

Kommutativität:

- $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$

Distributivität:

- $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
- $(\alpha \mid \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma \mid \beta\gamma$

Idempotenz:

- $\alpha \mid \alpha \equiv \alpha$

Stern:

Lemma 2.26

- $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$

α^+

Stern:

Lemma 2.26

- $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$

Stern:

Lemma 2.26

- $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

$\alpha^* \equiv \alpha$

Stern:

Lemma 2.26

- $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Beispiel 2.27

Herleitung einer Äquivalenz aus obigen Lemmas:

$\epsilon \mid \alpha^*$

Stern:

Lemma 2.26

- $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Beispiel 2.27

Herleitung einer Äquivalenz aus obigen Lemmas:

$\epsilon \mid \alpha^*$

$\equiv \epsilon \mid (\epsilon \mid \alpha\alpha^*)$ Stern Lemma

---

Stern:

Lemma 2.26

- $\epsilon \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Beispiel 2.27

Herleitung einer Äquivalenz aus obigen Lemmas:

$\epsilon \mid \alpha^*$

$\equiv \epsilon \mid (\epsilon \mid \alpha\alpha^*)$ Stern Lemma

$\equiv (\epsilon \mid \epsilon) \mid \alpha\alpha^*$ Assoziativität

Stern:

Lemma 2.26

- $\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Beispiel 2.27

Herleitung einer Äquivalenz aus obigen Lemmas:

$\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha^*$	
$\equiv \boldsymbol{\epsilon} \mid (\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^*)$	Stern Lemma
$\equiv (\boldsymbol{\epsilon} \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid \alpha\alpha^*$	Assoziativität
$\equiv \boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^*$	Idempotenz

Stern:

Lemma 2.26

- $\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Beispiel 2.27

Herleitung einer Äquivalenz aus obigen Lemmas:

$\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha^*$	
$\equiv \boldsymbol{\epsilon} \mid (\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^*)$	Stern Lemma
$\equiv (\boldsymbol{\epsilon} \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid \alpha\alpha^*$	Assoziativität
$\equiv \boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^*$	Idempotenz
$\equiv \alpha^*$	Stern Lemma

Lässt sich jede gültige Äquivalenz $\alpha \equiv \beta$ aus den obigen Lemmas für $\equiv$ herleiten?

Lässt sich jede gültige Äquivalenz $\alpha \equiv \beta$ aus den obigen Lemmas für $\equiv$ herleiten?

Satz 2.28 (Redko 1964)

Es gibt keine endliche Menge von gültigen Äquivalenzen aus denen sich alle gültigen Äquivalenzen herleiten lassen.

Lässt sich jede gültige Äquivalenz $\alpha \equiv \beta$ aus den obigen Lemmas für $\equiv$ herleiten?

Satz 2.28 (Redko 1964)

Es gibt keine endliche Menge von gültigen Äquivalenzen aus denen sich alle gültigen Äquivalenzen herleiten lassen.

Wenn man mehr als nur Äquivalenzen zulässt:

Arto Salomaa.
Two Complete Axiom Systems for the Algebra of Regular Events. Journal of the ACM, 1966.

2.8 Pumping Lemma

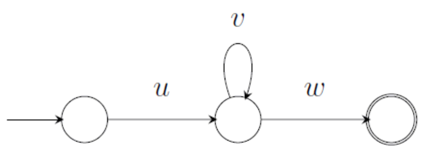
2.8 Pumping Lemma

Oder: *Wie zeigt man, dass eine Sprache nicht regulär ist?*

2.8 Pumping Lemma

Oder: *Wie zeigt man, dass eine Sprache nicht regulär ist?*

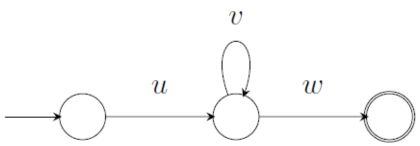
Beispiel 2.29



2.8 Pumping Lemma

Oder: *Wie zeigt man, dass eine Sprache nicht regulär ist?*

Beispiel 2.29



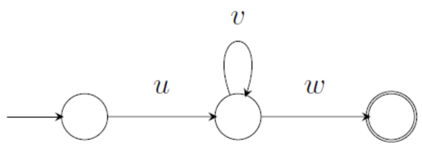
Satz 2.30 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

2.8 Pumping Lemma

Oder: *Wie zeigt man, dass eine Sprache nicht regulär ist?*

Beispiel 2.29



Satz 2.30 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$,
- $|uv| \leq n$, *und*
- $\forall i \geq 0.\ uv^iw \in R.$

Die logische Struktur des Satzes:

$\forall$*reg.* R.

Die logische Struktur des Satzes:

$\forall$*reg.* R. $\exists n > 0$.

Die logische Struktur des Satzes:

$$\forall \textit{reg. } R.\ \exists n > 0.\ \forall z \in R.\ |z| \geq n \Rightarrow\ \exists u\ v\ w.\ z = uvw \wedge \ldots$$

Die logische Struktur des Satzes:

$$\forall \textit{reg. } R.\ \exists n > 0.\ \forall z \in R.\ |z| \geq n \Rightarrow\ \exists u\ v\ w.\ z = uvw \wedge \ldots$$

Als Spiel:

- Gib mir eine reguläre Sprache R

Die logische Struktur des Satzes:

$$\forall \textit{reg. } R.\ \exists n > 0.\ \forall z \in R.\ |z| \geq n \Rightarrow\ \exists u\ v\ w.\ z = uvw \wedge \ldots$$

Als Spiel:

- Gib mir eine reguläre Sprache R
- Dann gebe ich dir ein $n > 0$ (abhängig von R!!!)

Die logische Struktur des Satzes:

$$\forall \textit{reg. } R.\ \exists n > 0.\ \forall z \in R.\ |z| \geq n \Rightarrow\ \exists u\ v\ w.\ z = uvw \wedge \ldots$$

Als Spiel:

- Gib mir eine reguläre Sprache R
- Dann gebe ich dir ein $n > 0$ (abhängig von R!!!)
- Gibst du mir dann ein $z \in R$ mit $|z| \geq n$

Die logische Struktur des Satzes:

$$\forall reg.\ R.\ \exists n > 0.\ \forall z \in R.\ |z| \geq n \Rightarrow\ \exists u\ v\ w.\ z = uvw \land \ldots$$

Als Spiel:

- Gib mir eine reguläre Sprache R
- Dann gebe ich dir ein $n > 0$ (abhängig von R!!!)
- Gibst du mir dann ein $z \in R$ mit $|z| \geq n$
- So kann ich z in uvw zerlegen so dass ...

Sprechweise: n ist eine Pumping-Lemma-Zahl für R,

Die logische Struktur des Satzes:

$$\forall reg.\ R.\ \exists n > 0.\ \forall z \in R.\ |z| \geq n \Rightarrow\ \exists u\ v\ w.\ z = uvw \land \ldots$$

Als Spiel:

- Gib mir eine reguläre Sprache R
- Dann gebe ich dir ein $n > 0$ (abhängig von R!!!)
- Gibst du mir dann ein $z \in R$ mit $|z| \geq n$
- So kann ich z in uvw zerlegen so dass ...

Sprechweise: n ist eine Pumping-Lemma-Zahl für R,
falls alle $z \in R$ mit $|z| \geq n$ sich so wie im Pumping-Lemma zerlegen und aufpumpen lassen.

Beweis:
Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \ldots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Beweis:
Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \ldots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Die beim Lesen von z durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Beweis:
Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \dots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Die beim Lesen von z durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Dann muss es $0 \leq i < j \leq n$ geben mit $p_i = p_j$.

Beweis:
Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \dots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Die beim Lesen von z durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Dann muss es $0 \leq i < j \leq n$ geben mit $p_i = p_j$.

Wir teilen z wie folg auf: $\underbrace{a_1 \dots a_i}_{u} \underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_{v} \underbrace{a_{j+1} \dots a_{|z|}}_{w}$

$\neq \varepsilon$

$\leq n$

Beweis:
Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \dots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Die beim Lesen von z durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Dann muss es $0 \leq i < j \leq n$ geben mit $p_i = p_j$.

Wir teilen z wie folg auf: $\underbrace{a_1 \dots a_i}_{u} \underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_{v} \underbrace{a_{j+1} \dots a_{|z|}}_{w}$

Damit gilt:

- $|uv| \leq n$,
- $v \neq \epsilon$, und
- $\forall l \geq 0.\ uv^l w \in R$.

□

Beweis:
Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \dots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Die beim Lesen von z durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Dann muss es $0 \leq i < j \leq n$ geben mit $p_i = p_j$.

Wir teilen z wie folg auf: $\underbrace{a_1 \dots a_i}_{u} \underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_{v} \underbrace{a_{j+1} \dots a_{|z|}}_{w}$

Damit gilt:

- $|uv| \leq n$,
- $v \neq \epsilon$, und
- $\forall l \geq 0.\ uv^l w \in R$.

□

[Darf A NFA sein?]

Fazit:

Falls $L(M) = R$ so ist $|Q_M|$ eine Pumping-Lemma-Zahl für R.

Fazit:

Falls $L(M) = R$ so ist $|Q_M|$ eine Pumping-Lemma-Zahl für R.

Ist $|Q_M| + 1$ auch eine Pumping-Lemma-Zahl für R?

Beweis:
Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \dots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Die beim Lesen von z durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Dann muss es $0 \leq i < j \leq n$ geben mit $p_i = p_j$.

Wir teilen z wie folg auf: $\underbrace{a_1 \dots a_i}_{u} \underbrace{a_{i+1} \dots a_j}_{v} \underbrace{a_{j+1} \dots a_{|z|}}_{w}$

Damit gilt:

- $|uv| \leq n$,
- $v \neq \epsilon$, und
- $\forall l \geq 0.\ uv^l w \in R$.

$\square$

[Darf A NFA sein?]

Fazit:

Falls $L(M) = R$ so ist $|Q_M|$ eine Pumping-Lemma-Zahl für R.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^n b^n \in L$.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^n b^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in uvw mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^n b^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in uvw mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.
Damit müsste gelten $a^{n-|v|} b^n = uw \in L$. ↯ $\square$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^n b^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in uvw mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.
Damit müsste gelten $a^{n-|v|} b^n = uw \in L$. ↯ $\square$

Endliche Automaten können nicht unbegrenzt zählen

Ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \leq 10^6\}$ regulär?

Ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \leq 10^6\}$ regulär?

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$. D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$. D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw|$$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$. D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w|$$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$. D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n$$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$. D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^lw \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$. D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Denn zwischen n^2 und $(n+1)^2$ liegt keine Quadratzahl. $\square$

Übungsaufgabe:

$\{1^p \mid p \text{ prim}\}$ ist nicht regulär.

Pumping-Lemma-Zahl für $L(ab^*c)$?

Pumping-Lemma-Zahl für $L(ab^*c)$?

Pumping-Lemma-Zahl für $\{aaaaaa\}$?

Pumping-Lemma-Zahl für $L(ab^*c)$?

Pumping-Lemma-Zahl für $\{aaaaaa\}$?

Erinnerung:

n ist Pumping-Lemma-Zahl für L
gdw
alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ lassen sich aufpumpen.

Bemerkung
Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt!

Bemerkung
Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt!

$\Rightarrow$ Pumping-Lemma hinreichend aber nicht notwendig um Nicht-Regularität zu zeigen.

2.9 Entscheidbarkeit

- Welche Probleme sind für reguläre Sprachen entscheidbar?

2.9 Entscheidbarkeit

- Welche Probleme sind für reguläre Sprachen entscheidbar? Sehr viele!

Statt Mengen verwendet man oft Eigenschaften oder Probleme. Bsp: “ist prim” statt “ist Element der Primzahlen”.

Eine Eigenschaft nennt man entscheidbar gdw die zugehörige Menge entscheidbar ist.

2.9 Entscheidbarkeit

- Welche Probleme sind für reguläre Sprachen entscheidbar? Sehr viele!
- Wie hängt die Komplexität mit der Repräsentation zusammen: DFA , NFA und RE?

Definition 2.33
Sei D eine Beschreibung einer Sprache (DFA, NFA, RE, Grammatik, etc).

Definition 2.33

Sei D eine Beschreibung einer Sprache (DFA, NFA, RE, Grammatik, etc).

Wortproblem: Gegeben w, gilt $w \in L(D)$?

Definition 2.33

Sei D eine Beschreibung einer Sprache (DFA, NFA, RE, Grammatik, etc).

Wortproblem: Gegeben w, gilt $w \in L(D)$?

Leerheitsproblem: Gilt $L(D) = \emptyset$?

Definition 2.33

Sei D eine Beschreibung einer Sprache (DFA, NFA, RE, Grammatik, etc).

Wortproblem: Gegeben w, gilt $w \in L(D)$?

Leerheitsproblem: Gilt $L(D) = \emptyset$?

Endlichkeitsproblem: Ist $L(D)$ endlich?

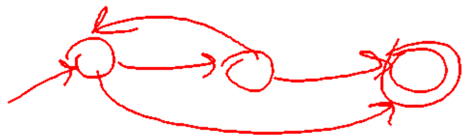
Definition 2.33

Sei D eine Beschreibung einer Sprache (DFA, NFA, RE, Grammatik, etc).

Wortproblem: Gegeben w, gilt $w \in L(D)$?

Leerheitsproblem: Gilt $L(D) = \emptyset$?

Endlichkeitsproblem: Ist $L(D)$ endlich?



Das Wortproblem für DFAs ist in linearer Zeit entscheidbar:

Das Wortproblem für DFAs ist in linearer Zeit entscheidbar:

Fakt 2.34
Sei M ein DFA. Das Problem $w \in L(M)$ ist in Zeit $O(|w|)$ entscheidbar.

Das Wortproblem für DFAs ist in linearer Zeit entscheidbar:

Fakt 2.34
Sei M ein DFA. Das Problem $w \in L(M)$ ist in Zeit $O(|w|)$ entscheidbar.

Lemma 2.35
Jede reguläre Sprache ist in linearer Zeit entscheidbar.

Beweis:
R reguläre $\implies$ Es gibt DFA M mit $L(M) = R$
$\implies$ $w \in R$ ist mit Hilfe von M in Zeit $O(|w|)$ entscheidbar. $\square$

Das Wortproblem für DFAs ist in linearer Zeit entscheidbar:

Fakt 2.34
Sei M ein DFA. Das Problem $w \in L(M)$ ist in Zeit $O(|w|)$ entscheidbar.

Lemma 2.35
Jede reguläre Sprache ist in linearer Zeit entscheidbar.

Beweis:
R reguläre $\implies$ Es gibt DFA M mit $L(M) = R$
$\implies$ $w \in R$ ist mit Hilfe von M in Zeit $O(|w|)$ entscheidbar. $\square$

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36
Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w|)$ entscheidbar.

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36
Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w|)$ entscheidbar.

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36
Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w|)$ entscheidbar.

Beweis:
Sei $Q = \{1, \dots, s\}$, $q_0 = 1$ und $w = a_1 \dots a_n$.

Lemma 2.37
Das Leerheitsproblem ist für NFAs und DFAs entscheidbar

w, DFA M

$\delta(q, a)$

$O(|w| + |M|)$

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36
Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w|)$ entscheidbar.

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36
Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w|)$ entscheidbar.

Beweis:
Sei $Q = \{1, \dots, s\}$, $q_0 = 1$ und $w = a_1 \dots a_n$.

$S := \{1\}$
for $i := 1$ **to** n **do** $S := \bigcup_{j \in S} \delta(j, a_i)$

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36
Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w|)$ entscheidbar.

Beweis:
Sei $Q = \{1, \dots, s\}$, $q_0 = 1$ und $w = a_1 \dots a_n$.

$S := \{1\}$
for $i := 1$ **to** n **do** $S := \bigcup_{j \in S} \delta(j, a_i)$
return $(S \cap F \neq \emptyset)$

□

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36
Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w| + |N|)$ entscheidbar.

Beweis:
Sei $Q = \{1, \dots, s\}$, $q_0 = 1$ und $w = a_1 \dots a_n$.

$S := \{1\}$
for $i := 1$ **to** n **do** $S := \bigcup_{j \in S} \delta(j, a_i)$
return $(S \cap F \neq \emptyset)$

□

Lemma 2.37

Das Leerheitsproblem ist für NFAs und DFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q|^2|\Sigma|)$ bzw $O(|Q||\Sigma|)$).

\# Kanten

Lemma 2.37

Das Leerheitsproblem ist für NFAs und DFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q|^2|\Sigma|)$ bzw $O(|Q||\Sigma|)$).

Beweis:

$L(M) = \emptyset$ gdw kein Endzustand von q_0 erreichbar ist.
Dies ist eine einfache Suche in einem Graphen, die jede Kante maximal ein Mal benutzen muss.
Ein NFA hat $\leq |Q|^2|\Sigma|$ Kanten, ein DFA hat $\leq |Q||\Sigma|$ Kanten. $\square$

Ist Σ fix, z.B. ASCII, so wird daraus $O(|Q|^2)$ bzw $O(|Q|)$.

Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
  $R := \emptyset$

Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
  $R := \emptyset$
  $W := K$
  while $W \neq \emptyset$ **do**
    pick and remove some $p \in W$

Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
  $R := \emptyset$
  $W := K$
  while $W \neq \emptyset$ **do**
    pick and remove some $p \in W$
    if $p \notin R$ **then**

Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
  $R := \emptyset$
  $W := K$
  while $W \neq \emptyset$ **do**
    pick and remove some $p \in W$
    if $p \notin R$ **then**
      $R := R \cup \{p\}$
      $W := W \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a)$

Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
  $R := \emptyset$
  $W := K$
  while $W \neq \emptyset$ **do**
    pick and remove some $\boxed{p \in W}$
    if $p \notin R$ **then**
      $R := R \cup \{p\}$
      $W := W \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \boxed{\delta(p, a)}$
  return R

Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
  $R := \emptyset$
  $W := K$
  while $W \neq \emptyset$ **do**
    pick and remove some $p \in W$
    if $p \notin R$ **then**
      $R := R \cup \{p\}$
      $W := W \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \boxed{\delta(p, a)}$
  return R

$|Q| * |\Sigma| *$

$|Q|$

$+ |K|$

Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

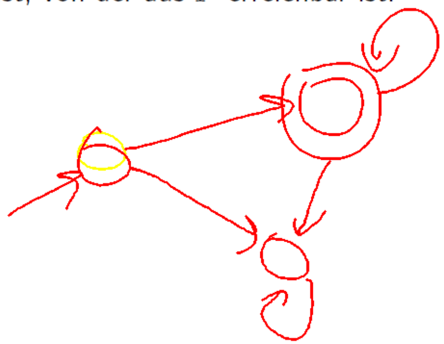
Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
    $R := \emptyset$
    $W := K$
    while $W \neq \emptyset$ **do**
        pick and remove some $p \in W$
        if $p \notin R$ **then**
            $R := R \cup \{p\}$
            $W := W \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a)$
    return R

Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist:



Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

Beweis:
$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist: