Script generated by TTT

Title: Seidl: Virtual_Machines (16.05.2013)

Date: Thu May 16 16:45:08 CEST 2013

Duration: 53:58 min

Pages: 62

Definition 3.10

Eine CFG heißt rechts-linear gdw jede Produkion von der Form

$$A \to aB \quad \text{oder} \quad A \to \epsilon \quad \text{ist.}$$

Eine CFG heißt links-linear gdw jede Produkion von der Form

$$A \to Ba \quad \text{oder} \quad A \to \epsilon \quad \text{ist.}$$

Lemma 3.11

Die rechts-linearen und links-linearen Grammatiken erzeugen jeweils genau die regulären Sprachen.

Beweis: Übung!

Korollar 3.12

Die regulären Sprachen sind eine echte Teilklasse der kontextfreien Sprachen.

3.2 Induktive Definitionen, Syntaxbäume und Ableitungen

1. Beispiel: Balancierte Klammern
2. Induktive Definitionen und Syntaxbäume allgemein
3. Äquivalenz von Ableitung, Syntaxbaum und induktiver Erzeugung

Beispiel 3.13

$$S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$$

Um zu zeigen, dass diese Grammatik die Menge aller balancierten Klammerwörter in $\{[,]\}^*$ erzeugt, betrachten wir die Grammatik als induktive Definition einer Spache $L_G(S)$:

Beispiel 3.13

$$S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$$

Um zu zeigen, dass diese Grammatik die Menge aller balancierten Klammerwörter in $\{[,]\}^*$ erzeugt, betrachten wir die Grammatik als induktive Definition einer Spache $L_G(S)$:

$$\begin{array}{rcl} & & \epsilon \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \Longrightarrow & [u] \in L_G(S) \end{array}$$

Beispiel 3.13

$$S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$$

Um zu zeigen, dass diese Grammatik die Menge aller balancierten Klammerwörter in $\{[,]\}^*$ erzeugt, betrachten wir die Grammatik als induktive Definition einer Spache $L_G(S)$:

$$\begin{array}{rcl} & & \epsilon \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \Longrightarrow & [u] \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) \land v \in L_G(S) & \Longrightarrow & uv \in L_G(S) \end{array}$$

Beispiel 3.13

$$S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$$

Um zu zeigen, dass diese Grammatik die Menge aller balancierten Klammerwörter in $\{[,]\}^*$ erzeugt, betrachten wir die Grammatik als induktive Definition einer Spache $L_G(S)$:

$$\begin{array}{rcl} & & \epsilon \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \Longrightarrow & [u] \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) \land v \in L_G(S) & \Longrightarrow & uv \in L_G(S) \end{array}$$

Damit gilt zB:

$\epsilon \in L_G(S) \implies [] \in L_G(S)$

Bemerkungen

- Die Produktionen ($\rightarrow$) erzeugen Wörter *top-down*, d.h. von einem Nichtterminal zu einem Wort hin.

Bemerkungen

- Die Produktionen ($\rightarrow$) erzeugen Wörter *top-down*, d.h. von einem Nichtterminal zu einem Wort hin.
- Die induktive Definition ($\Longrightarrow$) erzeugt Wörter *bottom-up*, d.h. sie setzt kleinere Wörter zu größeren zusammen.

Bemerkungen

- Die Produktionen ($\rightarrow$) erzeugen Wörter *top-down*, d.h. von einem Nichtterminal zu einem Wort hin.
- Die induktive Definition ($\Longrightarrow$) erzeugt Wörter *bottom-up*, d.h. sie setzt kleinere Wörter zu größeren zusammen.
- Die induktive Definition betrachtet nur Wörter aus Σ^*.

Bemerkungen

- Die Produktionen ($\rightarrow$) erzeugen Wörter *top-down*, d.h. von einem Nichtterminal zu einem Wort hin.
- Die induktive Definition ($\Longrightarrow$) erzeugt Wörter *bottom-up*, d.h. sie setzt kleinere Wörter zu größeren zusammen.
- Die induktive Definition betrachtet nur Wörter aus Σ^*.

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt,

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, dh $\forall u \in L_G(S).\ P(u)$, zeige:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & P(\epsilon) \\ P(u) & \Longrightarrow & P(\,[u]\,) \end{array}}$$

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, dh $\forall u \in L_G(S).\ P(u)$, zeige:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & P(\epsilon) \\ P(u) & \Longrightarrow & P(\,[u]\,) \\ P(u) \wedge P(v) & \Longrightarrow & P(uv) \end{array}}$$

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, dh $\forall u \in L_G(S).\ P(u)$, zeige:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & P(\epsilon) \\ P(u) & \Longrightarrow & P(\,[u]\,) \\ P(u) \wedge P(v) & \Longrightarrow & P(uv) \end{array}}$$

„Induktion über die Erzeugung von u“

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, dh $\forall u \in L_G(S).\ P(u)$, zeige:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & P(\epsilon) \\ P(u) & \Longrightarrow & P(\texttt{[}u\texttt{]}) \\ P(u) \wedge P(v) & \Longrightarrow & P(uv) \end{array}}$$

„Induktion über die Erzeugung von u"

Lemma 3.14
Alle $u \in L_G(S)$ enthalten gleich viele [wie].

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, dh $\forall u \in L_G(S).\ P(u)$, zeige:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & P(\epsilon) \\ P(u) & \Longrightarrow & P(\texttt{[}u\texttt{]}) \\ P(u) \wedge P(v) & \Longrightarrow & P(uv) \end{array}}$$

„Induktion über die Erzeugung von u"

Lemma 3.14
Alle $u \in L_G(S)$ enthalten gleich viele [wie].

Beweis:
Mit Induktion über die Erzeugung von u:

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, dh $\forall u \in L_G(S).\ P(u)$, zeige:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & P(\epsilon) \\ P(u) & \Longrightarrow & P(\texttt{[}u\texttt{]}) \\ P(u) \wedge P(v) & \Longrightarrow & P(uv) \end{array}}$$

„Induktion über die Erzeugung von u"

Lemma 3.14
Alle $u \in L_G(S)$ enthalten gleich viele [wie].

Beweis:
Mit Induktion über die Erzeugung von u:

- ϵ enthält 0 [und].
- Enthält u gleich viele [wie], so auch $\texttt{[}u\texttt{]}$.
- Enthalten u und v gleich viele [wie], so auch uv.

$\square$

Hinweis
Die Aussagen

$$\forall x \in M.\ P(x)$$

und

$$\forall x.\ x \in M \implies P(x)$$

sind logisch äquivalent.

Hinweis

Die Aussagen

$$\forall x \in M.\ P(x)$$

und

$$\forall x.\ x \in M \implies P(x)$$

sind logisch äquivalent.

Der Allquantor wird dann oft weggelassen:

$$x \in M \implies P(x)$$

Definition 3.15

Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v.\ uv = w$$

Definition 3.15

Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v.\ uv = w$$

Anzahl der Vorkommen:

$$\#_a(w) := \text{Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w$$

Definition 3.15

Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v.\ uv = w$$

Anzahl der Vorkommen:

$$\#_a(w) := \text{Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w$$

Für unser Beispiel führen wir zwei Abk. ein:

$$A(w) := \#_{[}(w) \qquad B(w) := \#_{]}(w)$$

Definition 3.15

Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v.\ uv = w$$

Anzahl der Vorkommen:

$$\#_a(w) := \text{Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w$$

Für unser Beispiel führen wir zwei Abk. ein:

$$A(w) := \#_{[}(w) \qquad B(w) := \#_{]}(w)$$

Wir nennen $w \in \{[,]\}^*$ balanciert gdw

(1) $A(w) = B(w)$ und

Definition 3.15

Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v.\ uv = w$$

Anzahl der Vorkommen:

$$\#_a(w) := \text{Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w$$

Für unser Beispiel führen wir zwei Abk. ein:

$$A(w) := \#_{[}(w) \qquad B(w) := \#_{]}(w)$$

Wir nennen $w \in \{[,]\}^*$ balanciert gdw

(1) $A(w) = B(w)$ und

(2) für alle Präfixe u von w gilt $A(u) \geq B(u)$

Definition 3.15

Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v.\ uv = w$$

Anzahl der Vorkommen:

$$\#_a(w) := \text{Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w$$

Für unser Beispiel führen wir zwei Abk. ein:

$$A(w) := \#_{[}(w) \qquad B(w) := \#_{]}(w)$$

Wir nennen $w \in \{[,]\}^*$ balanciert gdw

(1) $A(w) = B(w)$ und

(2) für alle Präfixe u von w gilt $A(u) \geq B(u)$

- Balanciert: [], [[]], [][], [[][]][]

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:

Mit Ind. über die Erzeugung von u.

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:

Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:

Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:

Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$
Fall $p = [u]$:

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$

Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 =$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$

Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 =$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$

Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$
Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$
Fall $p = [q$ mit $q \preceq u$:

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$
Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$
Fall $p = [q$ mit $q \preceq u$:
$A(p) = A(q) + 1$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$
Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$
Fall $p = [q$ mit $q \preceq u$:
$A(p) = A(q) + 1 \geq B(q) + 1$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:
$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:
Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$
Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$
Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$
Fall $p = [q$ mit $q \preceq u$:
$A(p) = A(q) + 1 \geq B(q) + 1 > B(q) = B(p)$

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:

Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$

Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$

Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$

Fall $p = [q$ mit $q \preceq u$:

$A(p) = A(q) + 1 \geq B(q) + 1 > B(q) = B(p)$

uv: Sei $p \preceq uv$.

Fall $p \preceq u$: $A(p) \geq B(p)$ mit IA für u

Fall $p = uq$ und $q \preceq v$:

$A(p) = A(u) + A(q) = B(u) + A(q) \geq B(u) + B(q) = B(uq) = B(p)$

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:

Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$.

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:

Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \ldots a_n$)

IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon)$

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon),\ h(a_1),\ h(a_1 a_2), \dots,\ h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 = [$ und $a_n =]$.

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon),\ h(a_1),\ h(a_1 a_2), \dots,\ h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 = [$ und $a_n =]$.

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon)$, $h(a_1)$, $h(a_1a_2)$,…, $h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 =$ [und $a_n =$].

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:
  (1) $A(v) = A([v]) - 1$

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon)$, $h(a_1)$, $h(a_1a_2)$,…, $h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 =$ [und $a_n =$].

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:
  (1) $A(v) = A([v]) - 1 = B([v]) - 1$

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon)$, $h(a_1)$, $h(a_1a_2)$,…, $h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 =$ [und $a_n =$].

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:
  (1) $A(v) = A([v]) - 1 = B([v]) - 1 = B(v)$

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon)$, $h(a_1)$, $h(a_1a_2)$,…, $h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 =$ [und $a_n =$].

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:
  (1) $A(v) = A([v]) - 1 = B([v]) - 1 = B(v)$
  (2) $p \preceq v$: $h([p) = A([p) - B([p) > 0$

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon),\ h(a_1),\ h(a_1 a_2), \dots,\ h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 = \texttt{[}$ und $a_n = \texttt{]}$.

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:
  (1) $A(v) = A(\texttt{[}v\texttt{]}) - 1 = B(\texttt{[}v\texttt{]}) - 1 = B(v)$
  (2) $p \preceq v$: $h(\texttt{[}p) = A(\texttt{[}p) - B(\texttt{[}p) > 0 \implies$
  $A(p) = A(\texttt{[}p) - 1 > B(\texttt{[}p) - 1 = B(p) - 1 \implies$
  $A(p) \geq B(p)$
  $\implies v \in L_G(S)$ (nach IA)

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:
Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)
IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.
Zz: $u \in L_G(S)$.
Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.
Sei $n > 0$.
Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:
$h(\epsilon),\ h(a_1),\ h(a_1 a_2), \dots,\ h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).
Insb. gilt $a_1 = \texttt{[}$ und $a_n = \texttt{]}$.

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:
  (1) $A(v) = A(\texttt{[}v\texttt{]}) - 1 = B(\texttt{[}v\texttt{]}) - 1 = B(v)$
  (2) $p \preceq v$: $h(\texttt{[}p) = A(\texttt{[}p) - B(\texttt{[}p) > 0 \implies$
  $A(p) = A(\texttt{[}p) - 1 > B(\texttt{[}p) - 1 = B(p) - 1 \implies$
  $A(p) \geq B(p)$
  $\implies v \in L_G(S)$ (nach IA) $\implies u = [v] \in L_G(S)$

Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle $h(a_1 \dots a_k)$.
  Sei $u_1 := a_1 \dots a_k$, $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$

Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle $h(a_1 \dots a_k)$.
  Sei $u_1 := a_1 \dots a_k$, $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$
  Dann sind u_1 und u_2 balanciert:
  (1) $A(u_1) = B(u_1)$ da $h(u_1) = 0$;

Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle $h(a_1 \dots a_k)$.
  Sei $u_1 := a_1 \dots a_k$, $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$
  Dann sind u_1 und u_2 balanciert:
  (1) $A(u_1) = B(u_1)$ da $h(u_1) = 0$;
  $A(u_2) = A(u) - A(u_1) = B(u) - B(u_1)$

Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle $h(a_1 \dots a_k)$.
  Sei $u_1 := a_1 \dots a_k$, $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$
  Dann sind u_1 und u_2 balanciert:
  (1) $A(u_1) = B(u_1)$ da $h(u_1) = 0$;
  $A(u_2) = A(u) - A(u_1) = B(u) - B(u_1) = B(u_2)$
  (2) $p \preceq u_1$

Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle $h(a_1 \dots a_k)$.
  Sei $u_1 := a_1 \dots a_k$, $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$
  Dann sind u_1 und u_2 balanciert:
  (1) $A(u_1) = B(u_1)$ da $h(u_1) = 0$;
  $A(u_2) = A(u) - A(u_1) = B(u) - B(u_1) = B(u_2)$
  (2) $p \preceq u_1 \implies p \preceq u \implies A(p) \geq B(p)$
  $p \preceq u_2$: $A(p) = A(u_1 p) - A(u_1)$

Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle $h(a_1 \dots a_k)$.
  Sei $u_1 := a_1 \dots a_k$, $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$
  Dann sind u_1 und u_2 balanciert:
  (1) $A(u_1) = B(u_1)$ da $h(u_1) = 0$;
  $A(u_2) = A(u) - A(u_1) = B(u) - B(u_1) = B(u_2)$
  (2) $p \preceq u_1 \implies p \preceq u \implies A(p) \geq B(p)$
  $p \preceq u_2$: $A(p) = A(u_1 p) - A(u_1) \geq B(u_1 p) - B(u_1) = B(p)$
  $\implies u_1, u_2 \in L_G(S)$ (nach IA, da $|u_i| < n$)
  $\implies u = u_1 u_2 \in L_G(S)$

$\square$

Moral:

- „$w \in L_G(S) \implies P(w)$" beweist man immer schematisch mit Induktion über die Erzeugung von w.
- „$P(w) \implies w \in L_G(S)$" beweist man oft mit Induktion über $|w|$. Erfordert meist Kreativität.

Wir übertragen jetzt die Idee der induktiven Erzeugung und der dazugehörige Induktionsregel auf beliebige CFGs $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Wir übertragen jetzt die Idee der induktiven Erzeugung und der dazugehörige Induktionsregel auf beliebige CFGs $G = (V, \Sigma, P, S)$.