Script generated by TTT

Title: Seidl: Theoretische_Informatik (04.07.2013)

Date: Thu Jul 04 16:02:18 CEST 2013

Duration: 89:18 min

Pages: 68

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \dots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$.

Beispiel 4.78

- Hat $(1, 111), (10111, 10), (10, 0)$ eine Lösung? 2,1,1,3

10111 1 1 10

10111 1 1 10

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \dots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$.

Beispiel 4.78

- Hat $(1, 111), (10111, 10), (10, 0)$ eine Lösung? 2,1,1,3
- Hat $(b, ca), (a, ab), (ca, a), (abc, c)$ eine Lösung?

abcaaabc

abcaaabc

2 1 3 2 4

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \dots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$.

Beispiel 4.78

- Hat $(1, 111), (10111, 10), (10, 0)$ eine Lösung? 2,1,1,3
- Hat $(b, ca), (a, ab), (ca, a), (abc, c)$ eine Lösung? 2,1,3,2,4

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \ldots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Beispiel 4.78

- Hat $(1, 111), (10111, 10), (10, 0)$ eine Lösung? 2,1,1,3
- Hat $(b, ca), (a, ab), (ca, a), (abc, c)$ eine Lösung? 2,1,3,2,4
- Hat $(101, 01), (101, 010), (010, 10)$ eine Lösung? Nein!

Definition 4.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \ldots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Beispiel 4.78

- Hat $(1, 111), (10111, 10), (10, 0)$ eine Lösung? 2,1,1,3
- Hat $(b, ca), (a, ab), (ca, a), (abc, c)$ eine Lösung? 2,1,3,2,4
- Hat $(101, 01), (101, 010), (010, 10)$ eine Lösung? Nein!
- Hat $(10, 101), (011, 11), (101, 011)$ eine Lösung? ~~[HMU]~~

Emil Post.
A Variant of a Recursively Unsolvable Problem.
Bulletin American Mathematical Society, 1946.

Emil Post.
A Variant of a Recursively Unsolvable Problem.
Bulletin American Mathematical Society, 1946.

Emil Leon Post, 1897 (Polen) – 1954 (NY).

Emil Post.
A Variant of a Recursively Unsolvable Problem.
Bulletin American Mathematical Society, 1946.

Emil Leon Post, 1897 (Polen) – 1954 (NY).

In einem Brief an Kurt Gödel, 1938:

> *For fifteen years I carried around the thought of astounding the mathematical world with my unorthodox ideas.*
>
> ...
>
> *As for any claims I might make perhaps the best I can say is that I would have proved Gödel's Theorem in 1921 — had I been Gödel.*

Lemma 4.79
Das PCP ist semi-entscheidbar.

Lemma 4.79
Das PCP ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Lemma 4.79
Das PCP ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Wir zeigen nun:

$$H \leq MPCP \leq PCP$$

Lemma 4.79
Das PCP ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Wir zeigen nun:

$$H \leq MPCP \leq PCP$$

wobei

Definition 4.80 (Modifiziertes PCP, MPCP)

Gegeben: wie beim PCP
Problem: Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_1 = 1$?

Lemma 4.79
Das PCP ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Wir zeigen nun:

$$H \leq MPCP \leq PCP$$

wobei

Definition 4.80 (Modifiziertes PCP, MPCP)

Gegeben: wie beim PCP
Problem: Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_1 = 1$?

Satz 4.81

$$MPCP \leq PCP$$

Beweis:
Für $w = a_1 \ldots a_n$:

$$\begin{aligned} \overline{w} &:= \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_n\# \\ \overleftarrow{w} &:= a_1\#a_2\#\ldots\#a_n\# \\ \overrightarrow{w} &:= \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_n \end{aligned}$$

$$f((x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)) := (\boxed{(\overline{x_1},\overrightarrow{y_1})}, \boxed{(\overleftarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}),\ldots,(\overleftarrow{x_k},\overrightarrow{y_k})}, (\$,\#\$))$$

Beweis:
Für $w = a_1 \ldots a_n$:

$$\begin{aligned} \overline{w} &:= \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_n\# \\ \overleftarrow{w} &:= a_1\#a_2\#\ldots\#a_n\# \\ \overrightarrow{w} &:= \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_n \end{aligned}$$

$$f((x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k)) := ((\overline{x_1},\overrightarrow{y_1}), (\overleftarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}),\ldots,(\overleftarrow{x_k},\overrightarrow{y_k}), (\$,\#\$))$$

Satz 4.82

$$H \le MPCP$$

Beweis:

- $(\#, \#q_0u\#)$
- (a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$
- $(qa, q'a')$ falls $\delta(q, a) = (q', a', N)$
  $(qa, a'q')$ falls $\delta(q, a) = (q', a', R)$
  $(bqa, q'ba')$ falls $\delta(q, a) = (q', a', L)$, für alle $b \in \Gamma$
- $(\#, \Box\#)$, $(\#, \#\Box)$
- (aq, q), (qa, q) für alle $q \in F, a \in \Gamma$
- $(q\#\#, \#)$ für alle $q \in F$

$\#q\,u\#$ $\quad$ $\#q\#\#$

$\#q\,u\#$ $\quad$ $\#q\#\#$

Aus $H \le PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Aus $H \le PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

(x_1, y_1)

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0,1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0,1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP: $\widehat{a_j} := 01^j$

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0,1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \ldots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \ldots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0,1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \ldots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \ldots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Dann hat $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ eine Lösung gdw
$(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \ldots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$ eine Lösung hat.

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 4.83
Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 4.84
Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0,1\}$ unentscheidbar

Beweis:
Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \ldots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \ldots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Dann hat $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ eine Lösung gdw
$(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \ldots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$ eine Lösung hat.
„$\Rightarrow$" klar, „$\Leftarrow$" folgt da $\hat{\cdot} : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ injektive ist:
$\widehat{x_{i_1}} \ldots \widehat{x_{i_n}} = \widehat{y_{i_1}} \ldots \widehat{y_{i_n}}$

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$

$\lambda_1 |x_1| + \ldots + \lambda_k |x_k| =$

$\lambda_1 |y_1| + \ldots + \lambda_k |y_k|$

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.
- Das PCP ist unentscheidbar falls $k \geq 7$.

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.
- Das PCP ist unentscheidbar falls $k \geq 7$.
- Für $k = 3, \ldots, 6$ ist noch offen, ob das PCP unentscheidbar ist.

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.
- Das PCP ist unentscheidbar falls $k \geq 7$.
- Für $k = 3, \ldots, 6$ ist noch offen, ob das PCP unentscheidbar ist.

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar: $L(A)=\emptyset$, $L(A)=L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar: $L(A)=\emptyset$, $L(A)=L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar: $L(M)=\emptyset$, $L(M_1)=L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches entscheidbar $(L(G)=\emptyset)$,

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar: $L(A)=\emptyset$, $L(A)=L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar: $L(M)=\emptyset$, $L(M_1)=L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches entscheidbar $(L(G)=\emptyset)$, und manches unentscheidbar: $L(G_1)=L(G_2)$, ...

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar: $L(A)=\emptyset$, $L(A)=L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar: $L(M)=\emptyset$, $L(M_1)=L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches entscheidbar $(L(G)=\emptyset)$, und manches unentscheidbar: $L(G_1)=L(G_2)$, ...

Satz 4.85

Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1)\cap L(G_2)=\emptyset$?*
2. *Ist $|L(G_1)\cap L(G_2)|=\infty$?*

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset,\ L(A) = L(B),\ \dots$
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:
  $L(M) = \emptyset,\ L(M_1) = L(M_2),\ \dots$
- Für CFGs ist manches entscheidbar ($L(G) = \emptyset$),
  und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2),\ \dots$

Satz 4.85
Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*
2. *Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?*
3. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?*
4. *Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*
5. *Ist $L(G_1) = L(G_2)$?*

Beweis: $\quad PCP \longmapsto (G_1, G_2)$

$\cancel{K} = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ wird abgebildet auf G_1

PCP

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & A\$B \\
A & \to & \boxed{a_1 A x_1 \mid \cdots \mid a_k A x_k} \\
A & \to & \boxed{a_1 x_1 \mid \cdots \mid a_k x_k} \\
B & \to & y_1^R B a_1 \mid \cdots \mid y_k^R B a_k \\
B & \to & y_1^R a_1 \mid \cdots \mid y_k^R a_k
\end{array}
$$

und G_2:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & a_1 S a_1 \mid \cdots \mid a_k S a_k \mid T \\
T & \to & 0T0 \mid 1T1 \mid \$
\end{array}
$$

$a_{j_n} \dots a_{j_1} x_{j_1} \dots x_{j_n}$ \$

$y^R_{j_n} \dots y^R_{j_1} a_{j_1} \dots a_{j_n}$

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset,\ L(A) = L(B),\ \dots$
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:
  $L(M) = \emptyset,\ L(M_1) = L(M_2),\ \dots$
- Für CFGs ist manches entscheidbar ($L(G) = \emptyset$),
  und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2),\ \dots$

Satz 4.85
Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*
2. *Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?*
3. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?*
4. *Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*

Beweis:
$K = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ wird abgebildet auf G_1 $\quad \overline{G_1}$

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & A\$B \\
A & \to & a_1 A x_1 \mid \cdots \mid a_k A x_k \\
A & \to & a_1 x_1 \mid \cdots \mid a_k x_k \\
B & \to & y_1^R B a_1 \mid \cdots \mid y_k^R B a_k \\
B & \to & y_1^R a_1 \mid \cdots \mid y_k^R a_k
\end{array}
$$

und G_2:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & a_1 S a_1 \mid \cdots \mid a_k S a_k \mid T \\
T & \to & 0T0 \mid 1T1 \mid \$
\end{array}
$$

$\overline{G_2}$

$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \quad \longleftrightarrow$

$L(\overline{G_1}) \cup L(\overline{G_2}) \overset{?}{=} \Sigma^*$

4.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:
  $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches entscheidbar ($L(G) = \emptyset$),
  und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2)$, ...

Satz 4.85

Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*
2. *Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?*
3. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?*
4. *Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*
5. *Ist $L(G_1) = L(G_2)$?*

$\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2$

Beweis:

$K = (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ wird abgebildet auf G_1

$$
\begin{aligned}
S &\to A\$B \\
A &\to a_1 A x_1 \mid \cdots \mid a_k A x_k \\
A &\to a_1 x_1 \mid \cdots \mid a_k x_k \\
B &\to y_1^R B a_1 \mid \cdots \mid y_k^R B a_k \\
B &\to y_1^R a_1 \mid \cdots \mid y_k^R a_k
\end{aligned}
$$

und G_2:

$$
\begin{aligned}
S &\to a_1 S a_1 \mid \cdots \mid a_k S a_k \mid T \\
T &\to 0T0 \mid 1T1 \mid \$
\end{aligned}
$$

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.

PCP lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
PCP lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
PCP lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig

„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $PCP \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*:

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
PCP lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $PCP \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$“.

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
PCP lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $PCP \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$“.

PCP unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

Satz 4.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
PCP lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $PCP \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$“.
PCP unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \Rightarrow L(G_4) = \Sigma^* \Rightarrow L(G_4)$ reg/det.
PCP lösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht CFL $\Rightarrow \overline{L(G_4)}$ nicht reg/det

Satz 4.87

Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Satz 4.87

Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Beweis:
Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion $PCP \mapsto G_4$ mit

$$PCP \text{ unlösbar} \Leftrightarrow L(G_4) = \Sigma^*.$$

Satz 4.87

Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Beweis:
Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion $PCP \mapsto G_4$ mit

$$PCP \text{ unlösbar} \Leftrightarrow L(G_4) = \Sigma^*.$$

Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann reduziert $PCP \mapsto (G_4, (a_1|\ldots|a_n)^*)$ das PCP auf das Problem $L(G) = L(\alpha)$, □

Satz 4.87
Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Beweis:
Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion
$PCP \mapsto G_4$ mit

$$PCP \text{ unlösbar } \Leftrightarrow L(G_4) = \Sigma^*.$$

Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann reduziert $PCP \mapsto (G_4, (a_1|\ldots|a_n)^*)$
das PCP auf das Problem $L(G) = L(\alpha)$, $\square$

5. Komplexitätstheorie

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.

- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus

  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus
  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.

- **Untere Schranken**: schwierig . . .

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus
  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.
- **Untere Schranken**: schwierig ...
  Bsp: Palindrom-Test auf einer 1-Band TM braucht Zeit $\Theta(n^2)$

5. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus
  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.
- **Untere Schranken**: schwierig ...
  Bsp: Palindrom-Test auf einer 1-Band TM braucht Zeit $\Theta(n^2)$

  Nicht hier.
- Einfluss des Maschinenmodells:
  Deterministisch oder Nichtdeterministisch

Polynomielle und exponentielle Komplexität

Taktfrequenz: 1GHz

	Problemgröße n					
Zeit	10	20	30	40	50	60
n	.01 ms	.02 ms	.03 ms	.04 ms	.05 ms	.06 ms
n^2	.1 ms	.4 ms	.9 ms	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^5	100ms	0.003s	0.02s	0.1 s	0.3 s	0.7 s
2^n	1 ms	0.001s	1 s	18 m	13 T	36 J
3^n	59 ms	3 s	2 T	385J	$2 \cdot 10^7$J	10^{12}J

ms=Mikrosek., s=Sek., m=Minute, T=Tag, J=Jahr

Polynomielle und exponentielle Komplexität

Taktfrequenz: 1GHz

	Problemgröße n					
Zeit	10	20	30	40	50	60
n	.01 ms	.02 ms	.03 ms	.04 ms	.05 ms	.06 ms
n^2	.1 ms	.4 ms	.9 ms	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^5	100ms	0.003s	0.02s	0.1 s	0.3 s	0.7 s
2^n	1 ms	0.001s	1 s	18 m	13 T	36 J
3^n	59 ms	3 s	2 T	385J	$2 \cdot 10^7$J	10^{12}J

ms=Mikrosek., s=Sek., m=Minute, T=Tag, J=Jahr

Problemgröße lösbar in fester Zeit: Speedup

Komplexität	n	n^2	n^5	2^n	3^n
1 MHz Prozessor	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
1 GHz Prozessor	1000 N_1	32 N_2	4 N_3	N_4 + 10	$N_5 + 6$

Zwei zentrale Komplexitätsklassen:

P = die von einer DTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme

Polynomielle und exponentielle Komplexität

Taktfrequenz: 1GHz

	Problemgröße n					
Zeit	10	20	30	40	50	60
n	.01 ms	.02 ms	.03 ms	.04 ms	.05 ms	.06 ms
n^2	.1 ms	.4 ms	.9 ms	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^5	100ms	0.003s	0.02s	0.1 s	0.3 s	0.7 s
2^n	1 ms	0.001s	1 s	18 m	13 T	36 J
3^n	59 ms	3 s	2 T	385J	$2 \cdot 10^7$J	10^{12}J

ms=Mikrosek., s=Sek., m=Minute, T=Tag, J=Jahr

Problemgröße lösbar in fester Zeit: Speedup

Komplexität	n	n^2	n^5	2^n	3^n
1 MHz Prozessor	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
1 GHz Prozessor	1000 N_1	32 N_2	4 N_3	$N_4 + 10$	$N_5 + 6$

Zwei zentrale Komplexitätsklassen:

P = die von einer DTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
= die „leichten“ Probleme (*feasible* problems)

NP = die von einer NTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme

Zwei zentrale Komplexitätsklassen:

P = die von einer DTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
= die „leichten“ Probleme (*feasible* problems)

NP = die von einer NTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
In exponentieller Zeit lösbar (s. Simulation NTM durch DTM)

Zwei zentrale Komplexitätsklassen:

P = die von einer DTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
= die „leichten“ Probleme (*feasible* problems)

NP = die von einer NTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
In exponentieller Zeit lösbar (s. Simulation NTM durch DTM)

Zentrale Frage:

¿ P = NP ?