Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS (30.10.2013)

Date: Wed Oct 30 17:45:54 CET 2013

Duration: 85:51 min

Pages: 36

WS 2013/14

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/

30. Oktober 2013

ZÜ III

Übersicht:

1. Fragen, Anregungen?
2. Thema: Funktionen
3. Thema: Aussagenlogik
4. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 3

2. Thema: Funktionen

Funktionen oder Abbildungen oder Zuordnungen f werden **einerseits** als Relationen aufgefasst:

Seien A, B Mengen.
Sei $f \subseteq A \times B$, so dass es

für alle $a \in A$ ein $b \in B$ gibt mit der Eigenschaft $(a, b) \in f$
(d.h. f hat den Definitionsbereich A)

und so dass, wenn $(a, b) \in f$ und $(a, c) \in f$ gilt, stets auch $b = c$ gilt
(d.h. f ist „rechtseindeutig“).

Dies ist die statische oder deklarative Interpretation des Funktionsbegriffs.

Andererseits:

Mathematische Gegenstände erschöpfen sich **nicht** in einer einzigen Sicht. Es gibt für obigen Funktionsbegriff auch eine dynamische oder operationale Sicht.

Danach beschreibt die Funktion auch einen Vorgang:
eine Funktion f ist auf ein Element a aus dem Definitionsbereich A anwendbar und liefert im Falle der Anwendung eindeutig ein Element b aus B, das dann als $f(a)$ bezeichnet wird.

Dies ist die statische oder deklarative Interpretation des Funktionsbegriffs.

Andererseits:

Mathematische Gegenstände erschöpfen sich **nicht** in einer einzigen Sicht. Es gibt für obigen Funktionsbegriff auch eine dynamische oder operationale Sicht.

Danach beschreibt die Funktion auch einen Vorgang:
eine Funktion f ist auf ein Element a aus dem Definitionsbereich A anwendbar und liefert im Falle der Anwendung eindeutig ein Element b aus B, das dann als $f(a)$ bezeichnet wird.

Einer operational interpretierten Funktion f
(die z.B. durch einen Algorithmus definiert ist)
kann eine Relation g_f zugeordnet werden.

Diese Relation g_f nennt man dann häufig Graph der Funktion f und ist wie folgt definiert:

$$(a, b) \in g_f \;:\Longleftrightarrow\; b = f(a)\,.$$

Umgekehrt kann eine deklarativ als Relation definierte Funktion $f \subseteq A \times B$ auch operational aufgefasst werden.

Man beachte, dass die Semantik von Algorithmen sowohl operational als auch funktional definiert wird (siehe Einführung in die Informatik).

Dies drückt in beispielhafter Weise die Tatsache aus, dass mathematische Gegenstände mehr als eine einzige Sichtweise erlauben; hier z.B.

- die Sicht der Struktur als ein Ergebnis und
- die Sicht eines Vorgangs zur Erzeugung der Struktur.

Man beachte, dass die Semantik von Algorithmen sowohl operational als auch funktional definiert wird (siehe Einführung in die Informatik).

Dies drückt in beispielhafter Weise die Tatsache aus, dass mathematische Gegenstände mehr als eine einzige Sichtweise erlauben: hier z.B.

- die Sicht der Struktur als ein Ergebnis und
- die Sicht eines Vorgangs zur Erzeugung der Struktur.

Bemerkung:

Das formal-abstrakte Denken denkt Gegenstände viel genialer als man es durch eine einzige Beschreibungsmethode würde erfassen können.

Auch später werden wir sehen, dass immer mehrere Sichtweisen auf einen abstrakten Gegenstand bzw. mehrere Darstellungen notwendig sind, um ihn vollständig zu erfassen.

Aus der operationalen Interpretation der Funktionen ergeben sich die funktionalen Ausdrücke:

$$f(a, f(b, c)), \quad f(a, g(f(b, c))), \quad \ldots .$$

Diese ergeben sich durch beliebig wiederholtes Einsetzen von funktionalen Ausdrücken in die Argumentstellen von Funktionen.

Der Zusammenhang der Teilausdrücke eines funktionalen Ausdrucks wird durch einen geordneten Baum dargestellt.

Wir schalten das Thema arithmetische Ausdrücke dazwischen um Beispiele für funktionale Ausdrücke zu liefern.

Mit Zahlen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) sind elementare Operationen verbunden. Dies sind Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division. Man nennt sie die „arithmetischen“ Operationen.

Zahlen ebenso wie die genannten Operationen sind logisch-geistige Gegenstände und erfordern naturgemäß eine allererste FORMALISIERUNG, d. h. eine Benennung oder Darstellung, um überhaupt über sie reden bzw. kommunizieren zu können.

Wir schalten das Thema arithmetische Ausdrücke dazwischen um Beispiele für funktionale Ausdrücke zu liefern.

Mit Zahlen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) sind elementare Operationen verbunden. Dies sind Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division. Man nennt sie die ,,arithmetischen" Operationen.

Zahlen ebenso wie die genannten Operationen sind logisch-geistige Gegenstände und erfordern naturgemäß eine allererste FORMALISIERUNG, d. h. eine Benennung oder Darstellung, um überhaupt über sie reden bzw. kommunizieren zu können.

Eine Darstellung ist dabei stets ein Text, z. B. eine Folge von Ziffern 2012 oder z. B. ein Dezimalbruch.

Operationen werden mit Symbolen wie $+, \cdot$ (Operatoren) bezeichnet, und eine Kombination von Operationen, angewandt auf gewisse Zahlen, wird durch sogenannte ,,arithmetische Ausdrücke" dargestellt,

wobei in diesen Ausdrücken Variable enthalten sein dürfen, die man für konkrete Rechnungen durch Zahlen ersetzt.

Eine Darstellung ist dabei stets ein Text, z. B. eine Folge von Ziffern 2012 oder z. B. ein Dezimalbruch.

Operationen werden mit Symbolen wie $+, \cdot$ (Operatoren) bezeichnet, und eine Kombination von Operationen, angewandt auf gewisse Zahlen, wird durch sogenannte ,,arithmetische Ausdrücke" dargestellt,

wobei in diesen Ausdrücken Variable enthalten sein dürfen, die man für konkrete Rechnungen durch Zahlen ersetzt.

Die Bezeichnungen für entsprechende arithmetische Ausdrücke sind aus der Schule bekannt.

Der arithmetische Ausdruck $2 + 3$ heißt *Summe* mit *erstem Summanden* 2 und *zweitem Summanden* 3. Die AUSWERTUNG des arithmetischen Ausdrucks $2 + 3$ liefert bekanntlich 5 als *Wert der Summe*.

Entsprechend heißt der arithmetische Ausdruck $2 \cdot 3$ *Produkt* mit dem *Multiplikanden* (oder *erstem Faktor*) 2 und dem *Multiplikator* (oder *zweitem Faktor*) 3. Die Auswertung des arithmetischen Ausdrucks $2 \cdot 3$ liefert bekanntlich 6 als *Wert des Produkts*.

Der Ausdruck $2 - 3$ heißt *Differenz* mit dem *Minuenden* 2 und dem *Subtrahenden* 3. Der *Wert der Differenz* ist hier gleich der (negativen) ganzen Zahl -1.

Die Bezeichnungen für entsprechende arithmetische Ausdrücke sind aus der Schule bekannt.

Der arithmetische Ausdruck $2+3$ heißt *Summe* mit *erstem Summanden* 2 und *zweitem Summanden* 3. Die AUSWERTUNG des arithmetischen Ausdrucks $2+3$ liefert bekanntlich 5 als *Wert der Summe*.

Entsprechend heißt der arithmetische Ausdruck $2 \cdot 3$ *Produkt* mit dem *Multiplikanden* (oder *erstem Faktor*) 2 und dem *Multiplikator* (oder *zweitem Faktor*) 3. Die Auswertung des arithmetischen Ausdrucks $2 \cdot 3$ liefert bekanntlich 6 als *Wert des Produkts*.

Der Ausdruck $2-3$ heißt *Differenz* mit dem *Minuenden* 2 und dem *Subtrahenden* 3. Der *Wert der Differenz* ist hier gleich der (negativen) ganzen Zahl -1.

Entsprechendes gilt für *Quotient*, Dividend, Divisor, Wert des Quotienten.

Die Bezeichnung der Ausdrücke sollte nicht mit der Bezeichnung der Operationen (Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division) verwechselt werden.

Die Bedeutung eines arithmetischen Ausdrucks A ist seine zugeordnete Funktion

$$[A](x, \ldots)\,,$$

die für jede Belegung der Variablen $(x, \ldots)$ einen Wert liefert.

Man kann nun einen arithmetischen Kalkül entwerfen (Regeln zur Produktion von arithmetischen Ausdrücken) in Analogie zum aussagenlogischen Kalkül der Vorlesung.

Entsprechendes gilt für *Quotient*, Dividend, Divisor, Wert des Quotienten.

Die Bezeichnung der Ausdrücke sollte nicht mit der Bezeichnung der Operationen (Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division) verwechselt werden.

Die Bedeutung eines arithmetischen Ausdrucks A ist seine zugeordnete Funktion

$$[A](x, \ldots)\,,$$

die für jede Belegung der Variablen $(x, \ldots)$ einen Wert liefert.

Man kann nun einen arithmetischen Kalkül entwerfen (Regeln zur Produktion von arithmetischen Ausdrücken) in Analogie zum aussagenlogischen Kalkül der Vorlesung.

2.1 Beispiel einer injektiven Funktion

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründung!

Antwort:
Sei $f(m,n) = 2^m \cdot 3^n$. Dann ist f injektiv.

Begründung:
Wir betrachten zwei Paare $x_1 = (m_1, n_1)$ und $x_2 = (m_2, n_2)$ natürlicher Zahlen und nehmen an, dass beide Paare auf ein und dieselbe natürliche Zahl y abgebildet werden, also dass gilt

$$f(x_1) = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = y = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2} = f(x_2)\,.$$

O.B.d.A. können wir $m_1 \le m_2$ annehmen.

2.1 Beispiel einer injektiven Funktion

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründung!

Antwort:
Sei $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Dann ist f injektiv.

Begründung:
Wir betrachten zwei Paare $x_1 = (m_1, n_1)$ und $x_2 = (m_2, n_2)$ natürlicher Zahlen und nehmen an, dass beide Paare auf ein und dieselbe natürliche Zahl y abgebildet werden, also dass gilt

$$f(x_1) = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = y = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2} = f(x_2)\,.$$

O.B.d.A. können wir $m_1 \le m_2$ annehmen.

2.1 Beispiel einer injektiven Funktion

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? Begründung!

Antwort:
Sei $f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Dann ist f injektiv.

Begründung:
Wir betrachten zwei Paare $x_1 = (m_1, n_1)$ und $x_2 = (m_2, n_2)$ natürlicher Zahlen und nehmen an, dass beide Paare auf ein und dieselbe natürliche Zahl y abgebildet werden, also dass gilt

$$f(x_1) = 2^{m_1} \cdot 3^{n_1} = y = 2^{m_2} \cdot 3^{n_2} = f(x_2)\,.$$

O.B.d.A. können wir $m_1 \le m_2$ annehmen.

Es folgt

$$3^{n_1} = 2^{m_2 - m_1} \cdot 3^{n_2}\,.$$

Wäre $m_2 - m_1 > 0$,
dann müßte 2 ein Teiler von 3 sein, weil 2 prim ist.
Aber 3 ist unzerlegbar.
Also folgt $m_1 = m_2$.

Analog erhält man $n_1 = n_2$, mithin $x_1 = x_2$.

Wir haben also gezeigt:
Es kann nicht sein, dass zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 durch f auf ein und dasselbe y abgebildet werden.
Genau das besagt die Injektivität von f.

Es folgt

$$3^{n_1} = 2^{m_2 - m_1} \cdot 3^{n_2}\,.$$

Wäre $m_2 - m_1 > 0$,
dann müßte 2 ein Teiler von 3 sein, weil 2 prim ist.
Aber 3 ist unzerlegbar.
Also folgt $m_1 = m_2$.

Analog erhält man $n_1 = n_2$, mithin $x_1 = x_2$.

Wir haben also gezeigt:
Es kann nicht sein, dass zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 durch f auf ein und dasselbe y abgebildet werden.
Genau das besagt die Injektivität von f.

Es folgt

$$3^{n_1} = 2^{m_2 - m_1} \cdot 3^{n_2}\,.$$

Wäre $m_2 - m_1 > 0$,
dann müßte 2 ein Teiler von 3 sein, weil 2 prim ist.
Aber 3 ist unzerlegbar.
Also folgt $m_1 = m_2$.

Analog erhält man $n_1 = n_2$, mithin $x_1 = x_2$.

Wir haben also gezeigt:
Es kann nicht sein, dass zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 durch f auf ein und dasselbe y abgebildet werden.
Genau das besagt die Injektivität von f.

3. Thema: Aussagenlogik

Erinnerung der „Syntax der Aussagenlogik“ (des Kalküls der aussagenlogischen Ausdrücke oder Formeln):

Regel 0: true und false sind Formeln

Regel 1: eine Aussagenvariable ist eine Formel

Regel 2: ist F eine Formel, dann ist auch $\neg F$ eine Formel

Regel 3: sind F und G Formeln, dann sind $F \wedge G$ und $F \vee G$ auch Formeln

Regel 4: Eine Zeichensequenz ist dann und nur dann eine Formel, wenn sie durch (ev. wiederholte) Anwendung der Regeln 0, 1, 2 oder 3 gebildet werden kann.

Gute Gelegenheit, Kritik an der mathematischen Mengenlehre zu üben:

Was ist eine Aussagenvariable?

Ist die Menge der Aussagenvariablen definiert?

Ist dieser Tisch eine Aussagenvariable?

Was wir daraus lernen:

Syntaktische Objekte sind subjektive Objekte, die eine persönliche Entscheidung erfordern. Diese Objekte sind qualifizierte Platzhalter (Erinnerung an erste Zentralübung!) z.B. einer intersubjektiven Kommunikation, in der sie dann aber den Rang absolut abstrakter Objekte einnehmen.

Über diese logischen Objekte kann man natürlich keine allgemeine Mengenbildung veranlassen. Hier liegt auch der Grund, warum man die Bildung der „Menge aller Mengen“ in das Reich der Phantasien verweisen muss.

Zweite Botschaft:

Die Konstruktion von mathematischen Objekten verläuft immer nach gleichem Schema:

1. Regeln für die Konstruktion einzelner Objekte

2. Zusammenfassung aller Objekte, die man mit den Regeln produzieren kann.

Die Semantik eines aussagenlogischen Ausdrucks ist trivialerweise durch die Auswertung gegeben:
jede Eingabe führt durch Auswertung zu einer Ausgabe.
Das nennt man Abbildung der Eingaben.

Formal:
Die Eingabe ist gegeben durch die Vorgabe (Belegung) der Variablen.

Die Bedeutung der Operatoren ist eine bestimmte Wahrheitsfunktion.

Die Auswertung folgt der funktionalen Struktur des Ausdrucks.

Lediglich die Bezeichnungen müssen gelernt werden.

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks F in den Variablen x, y, z als Wahrheits(wert)tabelle:

$$F = ((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)\,.$$

Gefragt wird also nach der Funktion

$$[\underbrace{((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)}_{\text{Formel } F}](x, y, z)\,,$$

die natürlich als Liste oder Tabelle dargestellt werden kann.

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks F in den Variablen x, y, z als Wahrheits(wert)tabelle:

$$F = ((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)\,.$$

Gefragt wird also nach der Funktion

$$[\underbrace{((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)}_{\text{Formel } F}](x, y, z)\,,$$

die natürlich als Liste oder Tabelle dargestellt werden kann.

Wir berechnen in mehreren Spalten die Zwischenergebnisse. Die Eingabeparameter sollten aus Gründen der besseren Lesbarkeit stets lexikographisch sortiert werden.

Sei $F = ((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)$.

Gesucht ist $[F](\beta)$ für alle Belegungen β der Variablen x, y, z.

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$\neg(x \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)$	$z \Rightarrow y$	F
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Wir berechnen in mehreren Spalten die Zwischenergebnisse. Die Eingabeparameter sollten aus Gründen der besseren Lesbarkeit stets lexikographisch sortiert werden.

Sei $F = ((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)$.

Gesucht ist $[F](\beta)$ für alle Belegungen β der Variablen x, y, z.

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$\neg(x \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)$	$z \Rightarrow y$	F
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Man kann die Zwischenergebnisse auch direkt in eine Spalte unter den Operator schreiben und dazu nur die Formel F einmalig in die Kopfzeile der Tabelle schreiben.

Allerdings leidet dann die Übersichtlichkeit.

Wiederholung Aussagenlogik:

- Aussage
- Aussagenvariable
- Wahrheitswert
- Junktor
- Aussagenlogischer Ausdruck, Formel, Strukturbaum
- Aussagenkalkül
- Wahrheitsfunktion, Belegung
- Formale Semantik der Aussagenlogik
- Tautologie

4. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 3

Für Blatt 3 noch nicht notwendig.

Korrekt? Probleme?