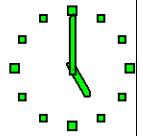




WS 2013/14



Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE\_DS (20.11.2013)

Date: Wed Nov 20 17:00:37 CET 2013

Duration: 86:35 min

Pages: 53

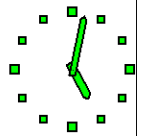
# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2013WS/ds/uebung/>

20. November 2013



## 1. Übungsbetrieb

Änderung der Anfangszeit der Zentralübung ab sofort  
(siehe Webseite der ZÜ):

Zentralübung: Mittwoch, 17.00 - 18.30 Uhr, Hörsaal MW 0001

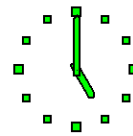
Ausnahme:

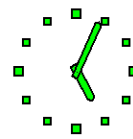
Am 5. Februar 2014 findet die ZÜ von 17.45 bis 19.15 Uhr statt  
(wie bisher).



## 2. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?



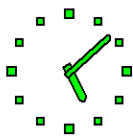


### 3. Thema: Herleitungskalkül des natürlichen Schließens

Kalküle des natürlichen Schließens gehen auf Gerhard Gentzen zurück.

Diese Kalküle formalisieren jene Schlußweisen, mit denen man Beweise in der mathematischen Literatur verständlich führen kann.

Wir werden dies an einem Beispiel eines Beweises studieren, den wir zunächst in natürlicher Weise führen werden, um ihn dann in direkter Entsprechung im Kalkül nachzubilden.

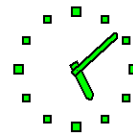


### 3. Thema: Herleitungskalkül des natürlichen Schließens

Kalküle des natürlichen Schließens gehen auf Gerhard Gentzen zurück.

Diese Kalküle formalisieren jene Schlußweisen, mit denen man Beweise in der mathematischen Literatur verständlich führen kann.

Wir werden dies an einem Beispiel eines Beweises studieren, den wir zunächst in natürlicher Weise führen werden, um ihn dann in direkter Entsprechung im Kalkül nachzubilden.



#### 3.1 Modus Tollens

Aufgabe:

Der „Modus Tollens“ (Schlussart der „Aufhebung“) bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

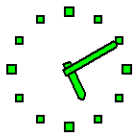
Zeigen Sie die Korrektheit des Modus Tollens mit Hilfe des Herleitungskalküls des natürlichen Schließens gemäß Vorlesung.

Zu beweisen ist also:

$$\vDash ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

mit Hilfe von

$$\vdash ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$



#### 3.1 Modus Tollens

Aufgabe:

Der „Modus Tollens“ (Schlussart der „Aufhebung“) bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

Zeigen Sie die Korrektheit des Modus Tollens mit Hilfe des Herleitungskalküls des natürlichen Schließens gemäß Vorlesung.

Zu beweisen ist also:

$$\vDash ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

mit Hilfe von

$$\vdash ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

3.1 Modus Tollens

**Aufgabe:**

Der „Modus Tollens“ (Schlussart der „Aufhebung“) bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

Zeigen Sie die Korrektheit des Modus Tollens mit Hilfe des Herleitungskalküls des natürlichen Schließens gemäß Vorlesung.

Zu beweisen ist also:

$$\models ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

mit Hilfe von

$$\vdash ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 5/21 LEA

$F$  und  $G$  sind Formelvariable (Schemavariablen), d. h. Platzhalter für aussagenlogische Formeln.

Ersetzt man beispielsweise  $F$  bzw.  $G$  jeweils durch aussagenlogische Variablen  $p$  bzw.  $q$ , dann erhält man die Formel

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

**Bemerkung:**  
Diese Formel ist ein Beispiel einer logischen Inferenz, da wir alle Implikationen so nennen können.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 6/21 LEA

3.1 Modus Tollens

**Aufgabe:**

Der „Modus Tollens“ (Schlussart der „Aufhebung“) bezeichnet eine logische Inferenz der Form

$$((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

Zeigen Sie die Korrektheit des Modus Tollens mit Hilfe des Herleitungskalküls des natürlichen Schließens gemäß Vorlesung.

Zu beweisen ist also:

$$\models ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

mit Hilfe von

$$\vdash ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 3.1 Modus Tollens 5/21 LEA

$F$  und  $G$  sind Formelvariable (Schemavariablen), d. h. Platzhalter für aussagenlogische Formeln.

Ersetzt man beispielsweise  $F$  bzw.  $G$  jeweils durch aussagenlogische Variablen  $p$  bzw.  $q$ , dann erhält man die Formel

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

**Bemerkung:**  
Diese Formel ist ein Beispiel einer logischen Inferenz, da wir alle Implikationen so nennen können.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 6/21 LEA

Die Inferenz nennen wir **korrekt** genau dann, wenn die Implikation (allgemein-)gültig ist, und schreiben in diesem Fall

$$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

Man beachte:

$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  ist eine Formel, nämlich eine Implikation.

Aber

$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  ist das Urteil der Allgemeingültigkeit der Formel, in Worten  $\neg p$  „folgt aus“  $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ .

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 7/21 LEA

Die Korrektheit des Modus Tollens zu beweisen, heißt also, für alle Formeln  $F$  und  $G$  die folgende Aussage zu beweisen.

$$\models ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

Dieser Beweis ist bereits dann erbracht (siehe Vorlesung für die Ersetzung von Formelvariablen durch Aussagenvariable), wenn Folgendes für die aussagenlogischen Variablen  $p$  und  $q$  gezeigt wird.

$$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

Die Folgerungsbeziehung  $\models$  begründet eine Relation zwischen aussagenlogischen Formeln. Sie steht in enger Beziehung zur Relation  $\vdash$ , die mit dem Herleitungskalkül definiert wird.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 8/21 LEA

Die Korrektheit des Modus Tollens zu beweisen, heißt also, für alle Formeln  $F$  und  $G$  die folgende Aussage zu beweisen.

$$\models ((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F.$$

Dieser Beweis ist bereits dann erbracht (siehe Vorlesung für die Ersetzung von Formelvariablen durch Aussagenvariable), wenn Folgendes für die aussagenlogischen Variablen  $p$  und  $q$  gezeigt wird.

$$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

Die Folgerungsbeziehung  $\models$  begründet eine Relation zwischen aussagenlogischen Formeln. Sie steht in enger Beziehung zur Relation  $\vdash$ , die mit dem Herleitungskalkül definiert wird.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 3.1 Modus Tollens 8/21 LEA

### 3.2 Herkömmlicher Beweis

Wir beweisen nun in herkömmlicher oder natürlicher Weise die Korrektheit der Inferenz

$$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

**Beweisidee:**

Wir nehmen  $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$  an und beweisen, dass die Annahme  $p$  einen Widerspruch erzeugt.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 9/21 LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

28 / 74 159%

Find

$$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$

Beweis:

- Wir nehmen an, dass  $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$  gilt.  
Kommentar: Nun führen wir die Annahme von  $p$  zum Widerspruch.
- Wir nehmen also  $p$  an.
- Es gilt nach (1) auch  $(p \rightarrow q)$ .
- Damit folgt  $q$ .
- Andererseits gilt wegen (1) auch  $\neg q$ .
- Damit folgt  $q \wedge \neg q$ , d.h. ein Widerspruch.
- Annahme (2) kann also verneint werden  $\neg p$ .
- Es folgt die zu beweisende Implikation.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 10/21 LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

38 / 74 159%

Find

### 3.3 Beweis durch Herleitung

Lösung der ursprünglichen Aufgabe:

Wir beweisen nun die Korrektheit der obigen Inferenz formal mit Hilfe des Herleitungskalküls für die Relation  $\vdash$ , also

$$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

Wir stellen die Herleitung in Form einer **Tabelle** dar, in der die Folge der Urteile mit Kommentaren aufgelistet wird.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 3.3 Beweis durch Herleitung 11/21 LEA

Grundlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

56 / 67 70,7%

Find

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - **Annahmereg.** Für jede  $A$ , für jede Annahme  $F$  in  $A$  :  

$$\frac{}{A \vdash F}$$
  - **Ausgeschlossener Dritte.** Für jede  $A$ , für jede  $F$  :  

$$\frac{}{A \vdash F \vee \neg F}$$

56

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

297 x 210 mm

Grundlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

57 / 67 70,7%

Find

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - **Regel für true.** Für jede  $A$  :  

$$\frac{}{A \vdash \text{true}}$$
  - **Regel für false.** Für jede  $A$ , für jede Formel  $F$  :  

$$\frac{A \vdash F \quad A \vdash \neg F}{A \vdash \text{false}}$$

57

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

297 x 210 mm

ndlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

58 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Konjunktionseinführung.** Für alle  $A$ , für alle  $F, G$  :
 
$$\frac{A \vdash F \quad A \vdash G}{A \vdash F \wedge G}$$
  - Konjunktionsbeseitigung.** Für alle  $A$ , für alle  $F, G$  :
 
$$\frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash F} \quad \frac{A \vdash F \wedge G}{A \vdash G}$$

58

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

ndlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

59 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Disjunktionseinführung.** Für alle  $A$ , für alle  $F, G$  :
 
$$\frac{A \vdash F}{A \vdash F \vee G} \quad \frac{A \vdash G}{A \vdash F \vee G}$$
  - Disjunktionsbeseitigung.** Für alle  $A$ , für alle  $F, G, H$  :
 
$$\frac{A \vdash F \vee G \quad A, F \vdash H \quad A, G \vdash H}{A \vdash H}$$

59

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

ndlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Negationseinführung.** Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, F \vdash \text{false}}{A \vdash \neg F}$$
  - Negationssbeseitigung.** Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, \neg F \vdash \text{false}}{A \vdash F}$$

60

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

ndlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

62 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Theorem:** Die Regelmenge hat die folgenden zwei Eigenschaften:
    - Wenn  $F \vdash G$ , dann  $F \models G$ . (**Korrektheit, soundness**)  
"Aus der Regelmenge werden nur gültige Inferenzen hergeleitet".
    - Wenn  $F \models G$ , dann  $F \vdash G$ . (**Vollständigkeit, completeness**)  
"Jede gültige Inferenz kann mit der Regelmenge hergeleitet werden".

62

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

38 / 74 159%

### 3.3 Beweis durch Herleitung

Lösung der ursprünglichen Aufgabe:

Wir beweisen nun die Korrektheit der obigen Inferenz formal mit Hilfe des Herleitungskalküls für die Relation  $\vdash$ , also

$$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

Wir stellen die Herleitung in Form einer **Tabelle** dar, in der die Folge der Urteile mit Kommentaren aufgelistet wird.

TUM ZÜ DS 3.3 Beweis durch Herleitung 11/21 LEA ©Dr. Werner Meixner

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

39 / 74 159%

Nr.	Annahmемenge	Konklusion	Regelanwendung
1.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q) \wedge \neg q$	Annahmeregeln
2.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash p$	Annahmeregeln
3.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q)$	1.+Konj.-Beseit.
4.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash q$	2.+3.+Impl.-Beseit.
5.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \neg q$	1.+Konj.-Beseit.
6.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \text{false}$	5.+4.+false-Regel
7.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\vdash \neg p$	6.+Neg.-Einf.
8.		$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	7.+Impl.-Einf.

TUM ZÜ DS 3.3 Beweis durch Herleitung 12/21 LEA ©Dr. Werner Meixner

Grundlagen-Aussagenlogikll.pdf - Adobe Acrobat Professional

61 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - **Implikationseinführung**. Für alle  $A$ , für alle  $F, G$  :
 
$$\frac{A, F \vdash G}{A \vdash F \rightarrow G}$$
  - **Implikationsbeseitigung**. Für alle  $A$ , für alle  $F, G$  :
 
$$\frac{A \vdash F \rightarrow G \quad A \vdash F}{A \vdash G}$$

61

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

297 x 210 mm

Grundlagen-Aussagenlogikll.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - **Negationseinführung**. Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, F \vdash \text{false}}{A \vdash \neg F}$$
  - **Negationssbeseitigung**. Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, \neg F \vdash \text{false}}{A \vdash F}$$

60

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

297 x 210 mm

ndlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

59 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Disjunktionseinführung. Für alle  $A$ , für alle  $F, G$  :
 
$$\frac{A \vdash F}{A \vdash F \vee G} \quad \frac{A \vdash G}{A \vdash F \vee G}$$
  - Disjunktionsbeseitigung. Für alle  $A$ , für alle  $F, G, H$  :
 
$$\frac{A \vdash F \vee G \quad A, F \vdash H \quad A, G \vdash H}{A \vdash H}$$

59

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

ndlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Negationseinführung. Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, F \vdash \text{false}}{A \vdash \neg F}$$
  - Negationssbeseitigung. Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, \neg F \vdash \text{false}}{A \vdash F}$$

60

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

ndlagen-AussagenlogikII.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 67 70,7%

## Kapitel II – Grundlagen; Logik

- Ein Kalkül für logische Inferenzen
  - Negationseinführung. Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, F \vdash \text{false}}{A \vdash \neg F}$$
  - Negationssbeseitigung. Für alle  $A$ , für alle  $F$  :
 
$$\frac{A, \neg F \vdash \text{false}}{A \vdash F}$$

60

Vorlesung Diskrete Strukturen WS 13/14  
Prof. Dr. J. Esparza – Institut für Informatik, TU München

s06.pdf - Adobe Acrobat Professional

39 / 74 159%

Nr.	Annahemenge	Konklusion	Regelanwendung
1.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q) \wedge \neg q$	Annahmeregeln
2.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash p$	Annahmeregeln
3.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q)$	1.+Konj.-Beseit.
4.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash q$	2.+3.+Impl.-Beseit.
5.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \neg q$	1.+Konj.-Beseit.
6.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \text{false}$	5.+4.+false-Regel
7.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\vdash \neg p$	6.+Neg.-Einf.
8.		$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	7.+Impl.-Einf.

ZÜ DS 3.3 Beweis durch Herleitung 12/21

TUM © Dr. Werner Meixner LEA



06.pdf - Adobe Acrobat Professional

39 / 74 159%

Nr.	Annahmemege	Konklusion	Regelanwendung
1.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q) \wedge \neg q$	Annahmeregeln
2.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash p$	Annahmeregeln
3.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q)$	1.+Konj.-Beseit.
4.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash q$	2.+3.+Impl.-Beseit.
5.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \neg q$	1.+Konj.-Beseit.
6.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \text{false}$	5.+4.+false-Regel
7.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\vdash \neg p$	6.+Neg.-Einf.
8.		$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	7.+Impl.-Einf.

3.3 Beweis durch Herleitung 12/21

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

40 / 74 159%

**Bemerkungen:**

Man beachte, dass die linke Seite einer Inferenz  $\mathcal{A} \vdash F$  stets eine Konjunktion von Formeln bedeutet. Diese Konjunktion wird zur Abkürzung häufig mit Komma geschrieben. Wie oben zu sehen ist, sind auch Mischungen möglich.

Wir haben damit gezeigt, dass die Inferenz  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  mit den Regeln des Herleitungskalküls hergeleitet werden kann. Da der Herleitungskalkül korrekt ist, folgt daraus  $\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ .

13/21

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

39 / 74 159%

Nr.	Annahmemege	Konklusion	Regelanwendung
1.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q) \wedge \neg q$	Annahmeregeln
2.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash p$	Annahmeregeln
3.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash (p \rightarrow q)$	1.+Konj.-Beseit.
4.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash q$	2.+3.+Impl.-Beseit.
5.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \neg q$	1.+Konj.-Beseit.
6.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q, p$	$\vdash \text{false}$	5.+4.+false-Regel
7.	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\vdash \neg p$	6.+Neg.-Einf.
8.		$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	7.+Impl.-Einf.

3.3 Beweis durch Herleitung 12/21

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

41 / 74 159%

**Bemerkungen:**

Man beachte, dass die linke Seite einer Inferenz  $\mathcal{A} \vdash F$  stets eine Konjunktion von Formeln bedeutet. Diese Konjunktion wird zur Abkürzung häufig mit Komma geschrieben. Wie oben zu sehen ist, sind auch Mischungen möglich.

Wir haben damit gezeigt, dass die Inferenz  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  mit den Regeln des Herleitungskalküls hergeleitet werden kann. Da der Herleitungskalkül korrekt ist, folgt daraus  $\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ .

13/21

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

42 / 74 159%

Find

**Bemerkungen:**

Man beachte, dass die linke Seite einer Inferenz  $\mathcal{A} \vdash F$  stets eine Konjunktion von Formeln bedeutet. Diese Konjunktion wird zur Abkürzung häufig mit Komma geschrieben. Wie oben zu sehen ist, sind auch Mischungen möglich.

Wir haben damit gezeigt, dass die Inferenz  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  mit den Regeln des Herleitungskalküls hergeleitet werden kann. Da der Herleitungskalkül korrekt ist, folgt daraus

$$\models ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p.$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 3.3 Beweis durch Herleitung 13/21 LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

43 / 74 159%

Find

## 4. Thema: Prädikatenlogische Ausdrücke

### 4.1 Schrittweiser Beweis

**Aufgabe:**

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum  $\mathbb{R}$ .

Seien  $P$  und  $Q$  einstellige Prädikate, für die die folgende Aussage gilt:

$$\exists x P(x) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Man zeige:

$$\models \text{Dann gilt } \exists x Q(x).$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 14/21 LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

46 / 74 159%

Find

## 4. Thema: Prädikatenlogische Ausdrücke

### 4.1 Schrittweiser Beweis

**Aufgabe:**

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum  $\mathbb{R}$ .

Seien  $P$  und  $Q$  einstellige Prädikate, für die die folgende Aussage gilt:

$$\exists x P(x) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Man zeige:

$$\models \text{Dann gilt } \exists x Q(x).$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 4.1 Schrittweiser Beweis 14/21 LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

47 / 74 159%

Find

**Lösung:**

Wir lösen die Formeln schrittweise auf und fügen anschließend die zu beweisende Aussage zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage  $\exists x P(x)$ .

Deshalb können wir von einem  $a \in \mathbb{R}$  mit Eigenschaft  $P(a)$  als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem  $a$  ist allerdings nur bekannt, dass  $P(a)$  gilt.

Sei also irgendein  $a \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $P(a)$  gegeben.

Da nach Voraussetzung die Aussage  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte  $a$ , dass die Aussage

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

gilt.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 15/21 LEA

4. Thema: Prädikatenlogische Ausdrücke

4.1 Schrittweiser Beweis

**Aufgabe:**

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum  $\mathbb{R}$ .

Seien  $P$  und  $Q$  einstellige Prädikate, für die die folgende Aussage gilt:

$$\exists x P(x) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Man zeige:

$$\text{Dann gilt } \exists x Q(x).$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 4.1 Schrittweiser Beweis 14/21 LEA

**Lösung:**

Wir lösen die Formeln **schrittweise** auf und fügen anschließend die zu beweisende Aussage zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage  $\exists x P(x)$ .

Deshalb können wir von einem  $a \in \mathbb{R}$  mit Eigenschaft  $P(a)$  als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem  $a$  ist allerdings nur bekannt, dass  $P(a)$  gilt.

Sei also irgendein  $a \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $P(a)$  gegeben.

Da nach Voraussetzung die Aussage  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte  $a$ , dass die Aussage

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

gilt.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 15/21 LEA

Es gelten also die beiden Aussagen  $P(a)$  und  $P(a) \rightarrow Q(a)$ .

Daraus können wir mit Modus ponens folgern, dass gilt

$$Q(a).$$

Da wir nun ein Element  $a$  sozusagen konstruiert haben, für das  $Q(a)$  gilt, haben wir bewiesen, dass die folgende Aussage gilt:

$$\exists x Q(x).$$

W.z.b.w.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 16/21 LEA

**Lösung:**

Wir lösen die Formeln **schrittweise** auf und fügen anschließend die zu beweisende Aussage zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage  $\exists x P(x)$ .

Deshalb können wir von einem  $a \in \mathbb{R}$  mit Eigenschaft  $P(a)$  als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem  $a$  ist allerdings nur bekannt, dass  $P(a)$  gilt.

Sei also irgendein  $a \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $P(a)$  gegeben.

Da nach Voraussetzung die Aussage  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte  $a$ , dass die Aussage

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

gilt.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 4.1 Schrittweiser Beweis 15/21 LEA

Es gelten also die beiden Aussagen  $P(a)$  und  $P(a) \rightarrow Q(a)$ .

Daraus können wir mit Modus ponens folgern, dass gilt

$$Q(a).$$

Da wir nun ein Element  $a$  sozusagen konstruiert haben, für das  $Q(a)$  gilt, haben wir bewiesen, dass die folgende Aussage gilt:

$$\exists x Q(x).$$

W.z.b.w.  $\square$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 16/21 LEA

## 4. Thema: Prädikatenlogische Ausdrücke

### 4.1 Schrittweiser Beweis

**Aufgabe:**

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum  $\mathbb{R}$ .

Seien  $P$  und  $Q$  einstellige Prädikate, für die die folgende Aussage gilt:

$$\exists x P(x) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

**Man zeige:**

$$\square$$

Dann gilt  $\exists x Q(x)$ .

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 4.1 Schrittweiser Beweis 14/21 LEA

### 4.2 Verneinung und DeMorgan

**Aufgabe:**

Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat  $P$  die folgende Aussage  $F$  gilt:

$$\forall x \exists y \forall z P(x, y, z).$$

Man leite eine pränex prädikatenlogische Formel her, die äquivalent ist zu

$$\neg F.$$

**Erklärung:**

Bei pränexen Formeln stehen alle Quantoren vorne.  $\square$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 17/21 LEA

**Lösung:**

Wir lösen die Formeln **schrittweise** auf und fügen anschließend die zu beweisende Aussage zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage  $\exists x P(x)$ .

Deshalb können wir von einem  $a \in \mathbb{R}$  mit Eigenschaft  $P(a)$  als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem  $a$  ist allerdings nur bekannt, dass  $P(a)$  gilt.

Sei also irgendein  $a \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $P(a)$  gegeben.

Da nach Voraussetzung die Aussage  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte  $a$ , dass die Aussage

$$P(a) \rightarrow Q(a) \quad \square$$

gilt.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 4.1 Schrittweiser Beweis 15/21 LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

57 / 74

## 4.2 Verneinung und DeMorgan

**Aufgabe:**

Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat  $P$  die folgende Aussage  $F$  gilt:

$$\forall x \exists y \forall z P(x, y, z).$$

Man leite eine pränex prädikatenlogische Formel her, die äquivalent ist zu

$$\neg F.$$

**Erklärung:**

Bei pränexen Formeln stehen alle Quantoren vorne.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 17/21 LEA

06.pdf - Adobe Acrobat Professional

60 / 74

**Lösung:**

Wenn *nicht* für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Eigenschaft  $Q(x)$  gilt, dann ist dies gleichbedeutend damit, dass für mindestens ein  $x \in \mathbb{R}$  die Eigenschaft  $Q(x)$  *nicht* gilt.

Für alle Formeln  $\forall x Q(x)$  gilt also nach DeMorgan

$$\neg \forall x Q(x) \equiv \exists x \neg Q(x).$$

Entsprechend gilt

$$\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$$

**Achtung:** die Formel  $\neg \forall x Q(x)$  ist nicht in pränexer Form.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 18/21 LEA

**Lösung:**

Wenn *nicht* für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Eigenschaft  $Q(x)$  gilt, dann ist dies gleichbedeutend damit, dass für mindestens ein  $x \in \mathbb{R}$  die Eigenschaft  $Q(x)$  *nicht* gilt.

Für alle Formeln  $\forall x Q(x)$  gilt also nach DeMorgan

$$\neg \forall x Q(x) \equiv \exists x \neg Q(x).$$

Entsprechend gilt

$$\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x).$$

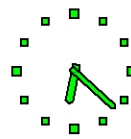
**Achtung:** die Formel  $\neg \forall x Q(x)$  ist nicht in pränexer Form.

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 18/21 LEA

Wir wenden diese Umformungsregel (nach DeMorgan) nun auf  $\neg F$  an wie folgt.

$$\begin{aligned} \neg F &\equiv \neg \forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \\ &\equiv \exists x \neg \exists y \forall z P(x, y, z) \\ &\equiv \exists x \forall y \neg \forall z P(x, y, z) \\ &\equiv \exists x \forall y \exists z \neg P(x, y, z). \end{aligned}$$

TUM ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 19/21 LEA

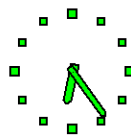


## 5. Ergänzung Blatt 5: Resolution als Herleitung

Sei  $F$  eine Formel, die als Menge von Klauseln  $K_1, K_2, \dots, K_n$  dargestellt sei.

Es seien  $R = L_1, L_2, \dots, L_m$  eine Folge von Klauseln.

Dann heißt  $R$  eine **Resolution** der Klausel  $L_m$  für die Formel  $F$ , falls jede Klausel  $L_i$  ein Resolvent von Klauseln  $L_j$  mit  $j < i$  oder Klausel aus  $F$  ist.



## 6. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 6

### ad HA 6.2a:

Die Antworten eines Resolutionsverfahrens sind „unerfüllbar“ oder „erfüllbar“.

Um zu zeigen, dass  $F$  gültig ist, muss man mit Resolutionsverfahren zeigen, dass  $\neg F$  unerfüllbar ist!

### ad HA 6.2b:

Siehe Thema Herleitungskalkül des natürlichen Schließens.