Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS_WS2014 (10.12.2014)

Date: Wed Dec 10 17:00:53 CET 2014

Duration: 84:11 min

Pages: 23

WS 2014/15

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Bungartz)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014WS/ds/uebung/

10. Dezember 2014

1. Übungsbetrieb

1.1 Termine

Von Montag, 22. Dezember 2014 bis Freitag, den 9. Januar 2014 finden keine Tutorübungen und keine Zentralübungen statt.

1.2 Fragen, Anregungen?

Fragen?

Anregungen?

Information:
Blatt 14 kann zum Erreichen zusätzlicher Punkte (max. 20) zur Verbesserung der Bonuspunktezahl verwendet werden.

Warnung und Aufklärung zum Thema Abschreiben!!!

Schlüssel zum Erfolg

- Konzentration
- Eigenständigkeit
- Privatheit
- Austausch

Zur Bedeutung insbesondere der Privatheit für die Zukunft der Informatik siehe den offenen Brief und Vortrag von W. Meixner über das Thema „Wohin geht die Informatik"
in:

`http://www14.in.tum.de/personen/meixner/`

2. Themen

2.1 Ungeordnete Zahlpartitionen

Wir betrachten Arbeitsblatt 3.

Jede ungeordnete Zahlpartition
$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$
mit $n_i \neq 0$,
entspricht einer Zuordnung von nicht unterscheidbaren Elementen einer Multimenge N zu nicht unterscheidbaren Elementen einer Multimenge R.

Aufgabe 1, Arbeitsblatt 3

Wir betrachten Multimengen M, die aus $n \in \mathbb{N}_0$ nicht unterscheidbaren Elementen bestehen. Solche Multimengen nennen wir *homogen*.

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ungeordneten k-Zahlpartitionen und Partitionen von homogenen Multimengen?
2. Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Aufgabe, n unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Boxen (Schachteln) zu verteilen, und der Aufgabe, n nicht unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Boxen zu verteilen.

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ungeordneten k-Zahlpartitionen und Partitionen von homogenen Multimengen?

Antwort

Untermultimengen einer homogenen Multimenge werden durch die Anzahl der enthaltenen Elemente charakterisiert.

Die Partitionen einer homogenen Multimenge sind dann durch die Multimenge der Klassenmächtigkeiten bzw. deren Summe bestimmt, was unmittelbar den Zusammenhang mit den ungeordneten Zahlpartitionen begründet.

3. Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Aufgabe, n unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Boxen (Schachteln) zu verteilen, und der Aufgabe, n nicht unterscheidbare Bälle in m nicht unterscheidbare Boxen zu verteilen.

Antwort

Die Nichtunterscheidbarkeit der Boxen (Schachteln) bedeutet, dass man lediglich über Klasseneinteilungen der Bälle, d. h. Partitionen der Menge bzw. Multimenge von Bällen, spricht, denn wenn es gleichgültig ist, in welche Box ein Ball gelegt wird, dann ist offenbar nur interessant, welche Bälle in die gleiche Box gelegt werden. Diese Gleichheit der Abbildung von Elementen entspricht aber genau der Klasseneinteilung von Bällen.

Aufgabe 2, Arbeitsblatt 3

Wir betrachten wieder homogene Multimengen M mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen, die also paarweise nicht unterscheidbar sind.
Sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen von M in k Klassen.

1. Bestimmen Sie $P_{n,0}$, $P_{n,k}$ und $P_{n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k > n$!
2. Beweisen Sie für alle $k \leq n$: $\quad P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$.
3. Studieren Sie die Darstellung der Werte von $P_{n,k}$ bis $n \leq 8$ und $k \leq 4$ nach Art des Pascalschen Dreiecks aus der Vorlesung.

Aufgabe 2, Arbeitsblatt 3

Wir betrachten wieder homogene Multimengen M mit $n \in \mathbb{N}_0$ Elementen, die also paarweise nicht unterscheidbar sind.
Sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen von M in k Klassen.

1. Bestimmen Sie $P_{n,0}$, $P_{n,k}$ und $P_{n,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $k > n$!
2. Beweisen Sie für alle $k \leq n$: $\quad P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$.
3. Studieren Sie die Darstellung der Werte von $P_{n,k}$ bis $n \leq 8$ und $k \leq 4$ nach Art des Pascalschen Dreiecks aus der Vorlesung.

ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 2.1 Ungeordnete Zahlpartitionen 11/54

$P_{n,n}$: Eine Partition, die ebenso viele Klassen besitzt, wie die zu partitionierende Multimenge, besteht aus einelementigen Klassen. Sie ist eindeutig bestimmt. Es folgt $P_{n,n} = 1$.

$P_{n,k}$: Falls $k > n$, dann soll die Anzahl der Klassen einer Partition größer sein als die Mächtigkeit der zu partitionierenden Multimenge. Da die Klassen jeder angenommenen Partition paarweise disjunkt sind, muss mindestens eine der Klassen leer sein, was aber der Definition von Klassen einer Partition widerspricht. Als folgt $P_{n,k} = 0$, weil keine solche Partition existiert.

2. Beweisen Sie für alle $k \leq n$: $P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$.

Lösung

Für $k = 0$ folgt unmittelbar $\sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i} = P_{n-0,0} = P_{n,0}$.
Sei $1 \leq k \leq n$.
Sei P eine Partition einer Multimenge von n nicht unterscheidbaren Elementen in k Klassen.

Entfernt man aus jeder Klasse ein beliebiges (weil nicht unterscheidbares) Element,
so erhält man i nichtleere Klassen mit $0 \leq i \leq n$, deren Vereinigung $n - k$ Elemente enthält.

D. h., wir erhalten eine Partition einer $(n-k)$-elementigen Multimenge mit i Klassen.

Die Operation der Entfernung eines Elements aus jeder Klasse liefert eine bijektive Abbildung der Menge der k-Partitionen einer n-elementigen Multimenge auf die disjunkte Vereinigungsmenge aller i-Partitionen einer $(n-k)$-elementigen Multimenge.

Daraus folgt

$$P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i} \, .$$

3. Studieren Sie die Darstellung der Werte von $P_{n,k}$ bis $n \leq 8$ und $k \leq 4$ nach Art des Pascalschen Dreiecks aus der Vorlesung.

Lösung

$P_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4
$n=0$	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	1	1	
4	0	1	2	1	1
5	0	1	2	2	1
6	0	1	3	3	2
7	0	1	3	4	3
8	0	1	4	5	5

Die leeren Felder der 9×5-Tabelle stellen die 0 dar.

Beispiel

Ungeordnete Zahlpartitionen:
4 nicht unterscheidbare Studenten erhalten 12 nicht unterscheidbare Tafeln Schokolade.
Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 4 Studenten aufzuteilen?

Beispiel

Ungeordnete Zahlpartitionen:
4 nicht unterscheidbare Studenten erhalten 12 nicht unterscheidbare Tafeln Schokolade.
Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 4 Studenten aufzuteilen?

Lösung

$$\begin{aligned} P_{12,4} &= \sum_{i=0}^{4} P_{8,i} = P_{8,0} + P_{8,1} + P_{8,2} + P_{8,3} + P_{8,4} \\ &= 0 + 1 + 4 + 5 + P_{8,4} \\ &= 10 + P_{4,0} + P_{4,1} + P_{4,2} + P_{4,3} + P_{4,4} \\ &= 10 + 0 + 1 + 2 + 1 + 1 = 15\,. \end{aligned}$$

Wie man sieht, wurde die Summenformel nur so weit angewendet, bis die Anzahlen elementar bestimmt werden können.

2.2 Zyklendarstellung von Permutationen

Wir besprechen im Wesentlichen VA 3.

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \dots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$.

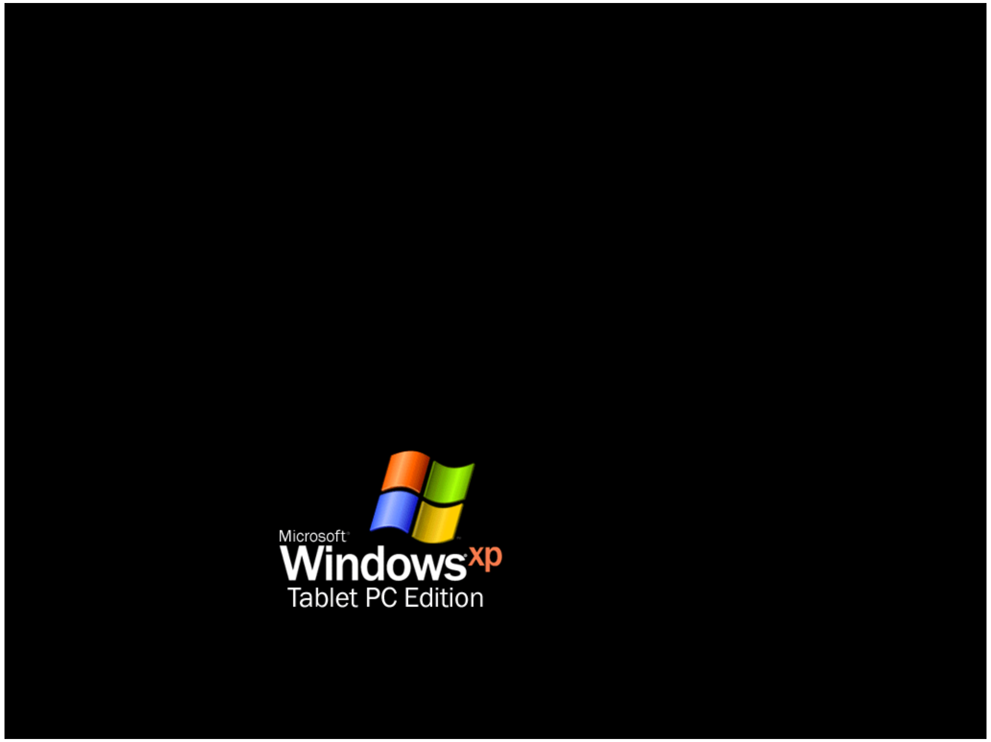
Dann ist die Abbildung

$$\pi_z : M \to M \text{ mit } \pi_z(a_i) = a_{(i+1) \bmod |M|}$$

eine *zyklische Permutation* (kurz: *Zyklus*) der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z.

Für jeden Zyklus π bezeichne $B(\pi)$ die Basis von π.

Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.



2.2 Zyklendarstellung von Permutationen

Wir besprechen im Wesentlichen VA 3.

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \ldots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$.

Dann ist die Abbildung

$$\pi_z : M \to M \text{ mit } \pi_z(a_i) = a_{(i+1) \bmod |M|)}$$

eine *zyklische Permutation* (kurz: *Zyklus*) der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z.

Für jeden Zyklus π bezeichne $B(\pi)$ die Basis von π.

Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

2.2 Zyklendarstellung von Permutationen

Wir besprechen im Wesentlichen VA 3.

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \ldots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$.

Dann ist die Abbildung

$$\pi_z : M \to M \text{ mit } \pi_z(a_i) = a_{(i+1) \bmod |M|)}$$

eine *zyklische Permutation* (kurz: *Zyklus*) der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z.

Für jeden Zyklus π bezeichne $B(\pi)$ die Basis von π.

Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. Wie viele Darstellungen
   besitzt ein zyklische Permutation (Zyklus) der Länge 3?

   Welchen Zyklus
   stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?

   Welche verschiedenen Darstellungen
   hat ${\pi_z}^3$?

   Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus?

Lösung:

Bemerkung:
Für Operationen f über einer Menge M, d.h. $f : M \to M$, gibt es die mehrfache Hintereinanderausführung der Operation f mit entsprechenden Schreibweisen. Es gilt

$$f^2 = f \circ f, \quad \text{und allgemein} \quad f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in M$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)), \quad \text{insbesondere } f^2(x) = f(f(x)).$$