Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_DS_WS2014 (17.12.2014)

Date: Wed Dec 17 17:01:37 CET 2014

Duration: 87:22 min

Pages: 29

WS 2014/15

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Bungartz)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014WS/ds/uebung/

17. Dezember 2014

Übersicht:

---

1. Übungsbetrieb

1.1 Termine

Von Montag, 22. Dezember 2014 bis Freitag, den 9. Januar 2014 finden keine Tutorübungen und keine Zentralübungen statt.

1.2 Fragen, Anregungen?

Fragen?

Anregungen?

1.3 Klausur am 3. Februar

1.3.1 Termin und Ort

Zeit: Dienstag, 3. Februar, 15.30 – 18.30 Uhr

Hörsäle: MW0001, MW2001, MW1801, MI HS1, Interim HS1, Physik HS1, Physik HS2, CH 21010, CH 22210.

Bitte mindestens 15 Minuten vor Beginn im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung:
Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 29. Januar.

Die Verteilung auf Sitzplätze sind den Listen zu entnehmen, die an den Hörsaaleingängen aushängen werden.

1.3 Klausur am 3. Februar

1.3.1 Termin und Ort

Zeit: Dienstag, 3. Februar, 15.30 – 18.30 Uhr

Hörsäle: MW0001, MW2001, MW1801, MI HS1, Interim HS1, Physik HS1, Physik HS2, CH 21010, CH 22210.

Bitte mindestens 15 Minuten vor Beginn im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung:
Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 29. Januar.

Die Verteilung auf Sitzplätze sind den Listen zu entnehmen, die an den Hörsaaleingängen aushängen werden.

1.3.2 Anmeldung

Eine Anmeldung für die Endterm
erfolgt über TUMonline oder in Sonderfällen persönlich am Infopoint.

Grundsätzlich bei Nichtanmeldung:
Bitte im Hörsaal bei der Aufsicht melden!

Achtung:

Bei Nichtanmeldung kann nicht garantiert werden, dass Sitzplatz und Klausurunterlagen zur Verfügung stehen!

Alle Teilnehmer der Klausuren müssen sich bei der Ausweiskontrolle im Hörsaal ausweisen können!!

1.3.3 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen,
außer
einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig)

Fragen während der Klausur sind erlaubt,
aber
Antworten werden, falls notwendig,
nur als Hörsaalansage gegeben.

1.3.4 Code

Auf dem Deckblatt der Klausurangabe finden Sie 8 Kästchen in die Sie einen Code mit 8 Ziffern schreiben können

Mit diesem Code können Ihre Ergebnisse schnell und Datenschutzrechtlich sicher veröffentlicht werden.

Bitte notieren Sie Ihren Code als Gedächtnisstütze!!!

2. Thema

2.1 Stirlingzahlen erster Art

Wir betrachten die Stirling-Zahlen erster Art $s_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, also die Anzahl

verschiedener Permutationen einer n-elementigen Menge mit jeweils k nichtleeren, paarweise disjunkten Zyklen.

1. Wir bestimmen die folgenden Spezialfälle.
   - $s_{0,0} = 1$.
   - $s_{n,n} = 1$.
   - $s_{n,k} = 0$, falls $k > n$.
   - $s_{n,0} = 0$, falls $n > 0$.

$s_{n,0} = 0$, falls $n > 0$.

Lösung:

Da die Vereinigung der Definitionsbereiche der Zyklen die abzubildende, nichtleere Menge überdecken muss, muss mindestens ein nicht leerer Zyklus existieren.

Daraus folgt aber $k > 0$.

2. Beweisen Sie mithilfe eines kombinatorischen Arguments, dass gilt:

$$s_{n,n-2} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1)\,. \qquad (1)$$

Lösung:

Aus der Definition der Stirlingzahlen $s_{n,k}$ ergibt sich hier $n \geq 2$.

Es gilt insbesondere $s_{2,0} = 0$
in Übereinstimmung mit der rechten Seite der Gleichung (1) für $n = 2$.

Die Menge der Permutationen von $[n]$ läßt sich als Vereinigung zweier disjunkter Mengen darstellen:

- Permutationen mit $n-4$ ein-elementigen Zyklen und zwei 2-elementigen Zyklen.

- Permutationen mit $n-3$ ein-elementigen Zyklen und einem 3-elementigen Zyklus:

- Permutationen mit $n-4$ ein-elementigen Zyklen und zwei 2-elementigen Zyklen:

  Wir gehen von den Partitionen von $[n]$ aus, die $n-4$ ein-elementige und zwei 2-elementige Klassen enthalten.

  Die Anzahl dieser Partitionen ist

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

  Da die Anzahl von Zyklen einer 1- oder 2-elementigen Menge jeweils gleich 1 ist, haben wir hier

  Anzahl der Partitionen = Anzahl der Permutationen.

- Permutationen mit $n-4$ ein-elementigen Zyklen und zwei 2-elementigen Zyklen:

  Wir gehen von den Partitionen von $[n]$ aus, die $n-4$ ein-elementige und zwei 2-elementige Klassen enthalten.

  Die Anzahl dieser Partitionen ist

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

  Da die Anzahl von Zyklen einer 1- oder 2-elementigen Menge jeweils gleich 1 ist, haben wir hier

  Anzahl der Partitionen = Anzahl der Permutationen.

- Permutationen mit $n-3$ ein-elementigen Zyklen und einem 3-elementigen Zyklus:

  Die Anzahl der Partitionen mit $n-3$ ein-elementigen und einer 3-elementigen Klasse ist, gleich

$$\binom{n}{3}.$$

  Nun aber kann die 3-elementige Klasse noch in 2-facher Weise zyklisch angeordnet werden.

  Also gibt es

$$2\cdot\binom{n}{3}$$

  Permutationen mit dieser Eigenschaft.

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
s_{n,n-2} &= 2\cdot\binom{n}{3}+\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}\\
&= \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{2}\\
&= \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(8+3(n-3))\\
&= \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-1).
\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

$$
\begin{aligned}
s_{n,n-2} &= 2 \cdot \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \\
&= \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\
&= \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(8+3(n-3)) \\
&= \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(3n-1)\,.
\end{aligned}
$$

2.2 Thema: Bäume

Definition:

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten (ein sogenannter einfacher Graph) ist ein Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Wichtige Eigenschaft eines Baumes: $|V| - |E| = 1$.

Falls $G = (V, E)$ unzusammenhängend und kreisfrei ist, dann spricht man von einem Wald.

Wichtige Eigenschaft eines Waldes: $|V| - |E| = k$, wobei k die Anzahl der Komponenten von G ist.

(freie Diskussion an der Tafel)

3. Vorbereitung auf TA Blatt 11

Zu VA 1 siehe Thema.

3.1 VA 2

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

i) $2, 1, 0\,.$ ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2\,.$ iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2\,.$

3. Vorbereitung auf TA Blatt 11

Zu VA 1 siehe Thema.

3.1 VA 2

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

i) $2, 1, 0\,.$ ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2\,.$ iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2\,.$

Lösung:

i) Nein, denn wenn einer der drei Knoten den Grad 2 hat, dann ist er mit den beiden anderen Knoten verbunden und es kann keinen isolierten Knoten (Grad 0) geben.

Außerdem muss die Summe der Grade gerade sein.

ii) Ja. Beispielsweise

$$G = ([6], \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,6\}\})\,.$$

iii) Nein, denn die Gradsumme eines Graphen ist immer gerade.

3. Vorbereitung auf TA Blatt 11

Zu VA 1 siehe Thema.

3.1 VA 2

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?

   i) $2, 1, 0\,.$ ii) $3, 3, 3, 3, 2, 2\,.$ iii) $3, 3, 3, 2, 2, 2\,.$

Lösung:

i) Nein, denn wenn einer der drei Knoten den Grad 2 hat, dann ist er mit den beiden anderen Knoten verbunden und es kann keinen isolierten Knoten (Grad 0) geben.

Außerdem muss die Summe der Grade gerade sein.

ii) Ja. Beispielsweise

$$G = ([6], \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,6\}\})\,.$$

iii) Nein, denn die Gradsumme eines Graphen ist immer gerade.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:

   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.

   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

ii) Die Umkehrung des vorigen Satzes gilt nicht!

Bemerkung: Wenn diese Umkehrung gelten würde, dann hätte man in dem Vergleich der Gradfolgen ein effizientes Verfahren, die Isomorphie von Graphen zu testen. Dieses Problem ist jedoch, wie man zeigen kann, nicht effizient lösbar.

Wir beweisen unsere Aussage durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, indem wir nämlich zwei nicht isomorphe Graphen G_1 und G_2 mit gleicher Gradfolge $3, 2, 2, 1, 1, 1$ angeben.

3.2 VA 2

1. Es gibt keinen Baum ohne Blätter! Wahr oder falsch? Begründung!
2. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$, für den $|V| > 2$ und für alle $v \in V$ $\deg(v) \neq 2$ gilt, einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens 2 Blättern benachbart ist. Dabei bezeichnet $\deg(v)$ den Grad von v.
   Hinweis: Entfernen Sie die Blätter eines Baumes.
3. Jeder Baum ist bipartit. Beweis!
4. Jeder k-reguläre Graph mit $k \geq 2$ enthält einen Kreis. Beweis!
5. Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Knoten, den man entfernen kann, ohne dass der Graph in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Beweis!