Script **generated by TTT**

Title: Meixner: Zue_DWT (10.04.2014)

Date: Thu Apr 10 14:18:16 CEST 2014

Duration: 58:13 min

Pages: 32

SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/

10. April 2014

- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Epost: meixner@in.tum.de
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: n.V.
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie
  - ttt-Aufzeichnung
  - Hin.Ti's

2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und Allgemeine didaktische Ziele im Sinne einer Verstärkung des Erfolges beim Studium der DWT.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor- bzw. Hausaufgaben der DWT Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation**

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Informelle **Metasprache** und übergeordnete **Interpretation**
- **Thema der Woche**.

3. Thema Arbeitsblatt 1: Informelle Begriffe der W'theorie

Was bedeutet der Begriff „Ereignis"?

Ist die Zahl 5
ein „Elementarereignis"?

Was meint der Begriff
„Zufall"?

Ist „Wahrscheinlichkeit" messbar?

Man kann ohne zu übertreiben behaupten:

Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe stehen

im Zentrum jeder naturwissenschaftlichen Theoriebildung.

Ebenso wahr ist aber, dass in vielen Studiengängen eben diese wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe erkenntnistheoretisch falsch und insbesondere z.B. nur als „Umrahmung" der Statistik gedeutet werden.

3.1 Ereignis

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist Teil der natürlichen Logik, mit der wir eine sich verändernde Welt logisch analysieren.

Im Zentrum dieser Logik stehen u. a. die Begriffe „Ereignis" und „Vorgang".

Ein Ereignis „tritt ein" oder „kommt vor"
stets als „Ergebnis" eines Vorgangs.

Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab
mit dem „Eintreten" oder „Vorkommen" eines Ereignisses,
das sein Ergebnis darstellt.

3.2 Ereignisalgebra:

Das Eintreten eines Ereignisses wird durch eine Aussage festgestellt.

Insofern besitzt die Gesamtheit der möglichen Ereignisse eines Experiments oder Versuchs $\mathcal{V}$ stets die Struktur der Gesamtheit von Aussagen der Art, dass

ein Ergebnis x mit einer Eigenschaft E aufgetreten ist.

Die Struktur der möglichen Ereignisse eines Experiments ist also eine Boolsche Algebra. Die möglichen Ereignisse bilden in ihrer Gesamtheit eine Boolsche Algebra, die man auch „Ereignisalgebra" nennt.

Wie jede Boolsche Algebra, so ist auch eine Ereignisalgebra isomorph einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$, die aus Teilmengen einer Basismenge Ω besteht, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{A}$ gelten.

Die Elemente von Ω nennt man in diesem Zusammenhang auch „Elementarereignisse" oder Ergebnisse, insbesondere nennt man Ω die Ergebnismenge der Ereignisalgebra.

Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ nennt man ein *Ereignis*.
Man beachte, dass ein sogenanntes Elementarereignis $x \in \Omega$ kein Ereignis ist, da $x \notin \mathcal{A}$ gilt.

Die Ergebnismenge Ω ist der Träger der Menge $\mathcal{A}$ der Ereignisse.

Wie jede Boolsche Algebra, so ist auch eine Ereignisalgebra isomorph einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$, die aus Teilmengen einer Basismenge Ω besteht, wobei $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{A}$ gelten.

Die Elemente von Ω nennt man in diesem Zusammenhang auch „Elementarereignisse" oder Ergebnisse, insbesondere nennt man Ω die Ergebnismenge der Ereignisalgebra.

Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ nennt man ein *Ereignis*.
Man beachte, dass ein sogenanntes Elementarereignis $x \in \Omega$ kein Ereignis ist, da $x \notin \mathcal{A}$ gilt.

Die Ergebnismenge Ω ist der Träger der Menge $\mathcal{A}$ der Ereignisse.

Sei $A \in \mathcal{A}$.

Wenn bei Durchführung des Experiments $\mathcal{V}$ das Ergebnis $x \in \Omega$ auftritt und $x \in A$ gilt, dann hat das Ereignis A stattgefunden.

Falls $x \notin A$ gilt, dann hat das Ereignis A nicht stattgefunden, wohl aber das Ereignis $\overline{A}$, d.h. das Komplement von A in Ω.

3.3 Vorkommen und Häufigkeit

Vorkommen sind zählbar:

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch Algorithmen beschrieben. In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente".

Der Vorgang, der bei „Ausführung" von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet", „erzeugt" Vorkommen von Ereignissen.

3.4 Häufigkeit:

Ein wesentliches Bestimmungsmerkmal der logischen Kategorie Vorgang ist die ,,Wiederholbarkeit".

Grundsätzlich können sich Vorgänge wiederholen mit ,,gleichen" Ereignisvorkommen als Ergebnis. Man denke z. B. an die wiederholte Ausführung von Algorithmen oder Experimenten in einem gleichen Kontext.

Ereignisse können ,,mehrfach vorkommen" und alle Vorkommen eines bestimmten Ereignisses sind gleich.
Ein Vorgang endet mit einem (wiederholten) Vorkommen eines Ereignisses.

Die Kardinalität der Multimenge der Vorkommen eines Ereignisses nennt man ,,Häufigkeit" des Ereignisses.
Häufigkeiten sind stets natürliche Zahlen, also insbesondere endliche Zahlen.

Abstrakt wird der Begriff der Häufigkeit durch Multimengen beschrieben, wobei eine ,,Multimenge" als eine Zusammenfassung von Vorkommen von Elementen einer Menge definiert wird.

Damit erweist sich der Multimengenbegriff als ein zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitsheorie bei der ,,Messung von Wahrscheinlichkeiten".

3.5 Wahrscheinlichkeit:

Es ist prinzipiell nicht möglich, eine ,,Menge" zu bilden über ,,zukünftige" Vorkommen von Ereignissen oder Wiederholungen von Experimenten.

Zukünftiges kann nur Gegenstand von ,,Hypothesen" sein.

Es ist aber prinzipiell möglich, Gesetzmäßigkeiten aufzustellen, denen jede Hypothesenbildung unterworfen sein muss.

Das System der ,,Wahrscheinlichkeit" von Ereignissen eines gegebenen Kontextes ist ein System von

hypothetischen Grenzwerten der ,,relativen Häufigkeit" dieser Ereignisse.

Gesetze:

- Damit ist jedem Ereignis A eine nicht negative reelle Zahl $P(A)$ zwischen 0 und 1 zugeordnet.
- Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von (abzählbar vielen) Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen, ist die Summe der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der einzelnen Ereignisse.

Tatsächlich ist es so,
dass jede Ergebnisprognose für einen realen Vorgang
grundsätzlich nichts anderes sein kann als
eine Annahme in einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Raum.

Das Tupel $(\mathcal{A}, P)$ einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ von sogenannten Ereignissen und der Funktion P mit den genannten Eigenschaften nennt man auch

Wahrscheinlichkeitsalgebra mit *Wahrscheinlichkeitsmaß* P.

Falls $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, dann nennt man

$$\mathcal{W} = (\Omega, \mathcal{A}, P)$$

einen *Kolmogoroffschen Wahrscheinlichkeitsraum*.

Spezialfall:

Falls Ω abzählbar ist und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gilt,
dann nennt man $\mathcal{W}$ einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Der wichtigste Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie ist:

Die abzählbare Summe von Maßbeträgen (eines Wahrscheinlichkeitsmaßes) einer abzählbaren Menge von disjunkten Ereignissen (einer σ-Algebra).

4. Vorbereitung auf TA Blatt 1

4.1 VA 1

- Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von „Ereignis“, „Elementarereignis“ oder „Ergebnismenge“ sprechen.

Antwort:

Die Mengenlehre gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine „statische" Welt logisch analysieren.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine sich verändernde („dynamische") Welt logisch analysieren.

Im Zentrum dieser Logik stehen u. a. die Begriffe „Ereignis" und „Vorgang".

4.2 VA 2

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null."

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

Bemerkung:

Dies steht nicht im Widerspruch dazu, dass die Ergebnisse einer wiederholten Ausführung von Experimenten auch zu Änderungen von Wahrscheinlichkeitsannahmen bzw. Räumen führen können.

2. Eine Box enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle.

   Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

   Wie viele Bälle enthielt die Box zu Beginn?

   Es sei Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit vorausgesetzt.

Lösung:

Sei n die Anzahl der schwarzen Bälle in der Box.
Dann enthält die Box $3n$ Bälle.

Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch $3n-2$ Bälle in der Box, von denen n Stück schwarz sind.

Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen, berechnet sich einerseits zu $\frac{n}{3n-2}$
und ist andererseits gegeben durch $\frac{2}{5}$.
Wir Lösen die Gleichung $\frac{n}{3n-2}=\frac{2}{5}$ nach n auf und erhalten $n=4$.

Antwort: Zu Beginn enthielt die Box 12 Bälle.

Lösung:

Sei n die Anzahl der schwarzen Bälle in der Box.
Dann enthält die Box $3n$ Bälle.

Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch $3n-2$ Bälle in der Box, von denen n Stück schwarz sind.

Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen, berechnet sich einerseits zu $\frac{n}{3n-2}$
und ist andererseits gegeben durch $\frac{2}{5}$.
Wir Lösen die Gleichung $\frac{n}{3n-2}=\frac{2}{5}$ nach n auf und erhalten $n=4$.

Antwort: Zu Beginn enthielt die Box 12 Bälle.

4.3 VA 3

- Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

Lösung:

Seien $\Omega=\{1,2\}$ und $\Pr[1]=1, \Pr[2]=0$.

Dann ist $W=(\Omega,\Pr)$
ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Denn offenbar gilt $0\le Pr[e]\le 1$ für alle $e\in\Omega$
und es gilt $\sum_{e\in\Omega}\Pr[e]=1$.

2. Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.
Für Ereignisse A und B gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.
Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Lösung:

Aus $\quad 1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$
folgt $\quad \Pr[A \cup B] = 1$.

Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned} 1 = \Pr[A \cup B] &= \Pr[(A \setminus B) \cup B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Es folgt $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Lösung:

Aus $\quad 1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$
folgt $\quad \Pr[A \cup B] = 1$.

Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned} 1 = \Pr[A \cup B] &= \Pr[(A \setminus B) \cup B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Es folgt $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

4.4 VA 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

5. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 1

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben der DWT-Übungsblätter sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 4.2:

Beachten Sie, dass noch weitere Buchstaben außer a, b, c in einem Wort der Länge 14 vorkommen mssen. Welche das sind, ist aber irrelevant.