Script **generated by TTT**

Title: Meixner: Zue_DWT (24.04.2014)

Date: Thu Apr 24 14:15:30 CEST 2014

Duration: 55:40 min

Pages: 28

SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/

24. April 2014

ZÜ II

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen Neuerungen bei Korrekturen
2. Thema	Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen
3. Vorbereitung	TA Blatt 2
4. Hin.Ti's	HA Blatt 2

1. Übungsbetrieb

Fragen?

Vorschläge?

Neue Korrekturregeln

Ab Blatt 2 wird nach den folgenden Korrekturregeln verfahren:

(Siehe Übungswebseite)

Neue Korrekturregeln

Ab Blatt 2 wird nach den folgenden Korrekturregeln verfahren:

- Die Abgabe erfolgt wie bei Blatt 1 bis spätestens zu dem Termin, der auf dem Blatt angegeben ist.
- Für jedes Blatt bestimmt der Übungsleiter durch 2-maligen Münzwurf zwei von vier Aufgaben.
  Diese und nur diese werden bei allen Teilnehmern korrigiert.
- Jeder Teilnehmer bekommt das Doppelte der von ihm geleisteten Punkte gutgeschrieben.
- Das Verfahren kann nach rechtzeitiger Ankündigung vor Abgabe des Blattes wieder ausgesetzt werden. In diesem Fall wird dann wieder jede Aufgabe korrigiert.

(Siehe Übungswebseite)

2. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

2.1 Definitionen nach Vorlesung

Die paarweise verschiedenen Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{1}$$

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]. \tag{2}$$

Achtung:

1. Falls für paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ die folgende Gleichung gilt

$$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n], \tag{3}$$

dann gilt nicht notwendigerweise auch für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ die Gleichung

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{4}$$

Aber:

2. Falls n Zufallsvariable $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind, dann sind für alle Teilmengen $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ die Variablen $X_{i_1}, \dots X_{i_k}$ unabhängig, d. h. es gelten für alle $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in W_{X_{i_1}} \times \dots \times W_{X_{i_k}}$ die Gleichungen

$$\Pr[X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_k} = x_{i_k}] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_{i_k} = x_{i_k}] .$$

Insbesondere sind dann für beliebige $x_1, \dots, x_n$ die Ereignisse

$$A_1 = („X_1 = x_1“), \; \dots \; , \; A_n = („X_n = x_n“)$$

unabhängig.

Es gilt der folgende Satz, der die Unabhängikeit von Ereignissen und die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen in Zusammenhang bringt.

Zuvor aber die Definition der Indikatorvariablen (siehe Vorlesung):
Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann heißt die Abbildung $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt, d.h. } x \in A\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Indikatorvariable des Ereignisses A.

Bezüglich des gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes ist jede Indikatorvariable eine Zufallsvariable.

Satz:

Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen $I_{A_1}, \dots, I_{A_n}$ unabhängig sind.

2.2 Konstruktion unabhängiger Ereignisse

Thema ist die allgemeine Konstruktion unabhängiger Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \le p_i \le 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert.

Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

Microsoft Windows xp
Tablet PC Edition

2.2 Konstruktion unabhängiger Ereignisse

Thema ist die allgemeine Konstruktion unabhängiger Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \le p_i \le 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert.

Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.
  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. *Beweis*!
- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i.

  Für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ mit $s_i \in \{0,1\}$ (siehe Vorlesung) und Ereignis $A^s := \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$
  wählen wir
  ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$.

  Wir definieren $A_{k+1} := \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$
  eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. *Beweis*!

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.
  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. *Beweis*!
- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i.

  Für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ mit $s_i \in \{0,1\}$ (siehe Vorlesung) und Ereignis $A^s := \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$
  wählen wir
  ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$.

  Wir definieren $A_{k+1} := \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$
  eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. *Beweis*!

3. Vorbereitung auf Tutoraufgaben Blatt 2

3.1 VA 1

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.
2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

3. Vorbereitung auf Tutoraufgaben Blatt 2

3.1 VA 1

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.
2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

Konstruktion des Beispiels (Teilaufg. 2):

Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr(x) = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$.

Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.

Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$.

Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

Wir haben nun die Partition

$$\begin{aligned} A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 &&= [9, 12]\,, \\ A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 &&= [13, 16]\,, \\ A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} &&= [1, 8]\,, \\ A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} &&= [17, 24]\,. \end{aligned}$$

Seien
$B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$, $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.

Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

Wir setzen $C = A_3$ und erhalten $\Pr[C] = \frac{1}{4}$.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion (Teilaufg. 1):

Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}
\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s]\cdot\Pr[A^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1}\cdot\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\sum_{s\in\{0,1\}^k}\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit im $(k+1)$-ten Schritt:

Die Menge der Durchschnitte A^s mit $s=(s_1,\ldots,s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine 2^k-Partition von Ω.

Bei der Konstruktion eines Ereignisses A_{k+1}, so dass $\{A_1,A_2,\ldots,A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen A^s in konstantem Verhältnis p_{k+1} zu $1-p_{k+1}$.

Wir gehen nach Vorlesung vor und zeigen für alle $s\in\{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung

$$\Pr[A^s]=\prod_{i\in[k+1]}\Pr[A_i^{s_i}]\,.$$

Falls $s_{k+1}=0$,

dann gilt $\quad A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i})\cap\overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\ldots,s_k)}\setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr\left[A^{(s_1,\ldots,s_k)}\setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}\right] \\
&= \Pr\left[A^{(s_1,\ldots,s_k)}\setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}\mid \bigcap_{i\in[k]}A_i^{s_i}\right]\cdot\Pr\left[\bigcap_{i\in[k]}A_i^{s_i}\right] \\
&= (1-p_{k+1})\cdot\Pr\left[\bigcap_{i\in[k]}A_i^{s_i}\right] \\
&= \Pr\left[A_{k+1}^{s_{k+1}}\right]\cdot\Pr\left[\bigcap_{i\in[k]}A_i^{s_i}\right] \;=\; \prod_{i\in[k+1]}\Pr\left[A_i^{s_i}\right]\,.
\end{aligned}$$

3.2 VA 2

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus.
Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. $X :=$
   Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.

   -

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n \cdot Pr[X=n] \\
&= \sum_{n\geq 1} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6\,.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n\geq 1} n^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n(n-1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sum_{n\geq 2} n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 60,
\end{aligned}$$

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n \cdot Pr[X=n] \\
&= \sum_{n\geq 1} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6\,.
\end{aligned}$$

ZÜ DWT
©Dr. Werner Meixner
3.2 VA 2
20/24

Wegen

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n\geq 1} n^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n(n-1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sum_{n\geq 2} n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 60,
\end{aligned}$$

ZÜ DWT
©Dr. Werner Meixner
3.2 VA 2
21/24

ad HA 1:

1. Versuchen Sie es mit $\Pr(0) = 1$.

2. Zerlegen Sie Ω in disjunkte Mengen
   $A = \{n \in \mathbb{N}_0\,;\, n \bmod 2 = 0\}$ und
   $B = \{n \in \mathbb{N}_0\,;\, n \bmod 2 = 1\}$.
   Benutzen Sie mehrfach die geometrische Reihe $\sum_{i \in \mathbb{N}} 3^{-i}$.

Fortsetzung siehe Informationsblatt 1.

–