Script **generated by TTT**

Title:	Meixner: ZUE_DS (10.04.2014)
Date:	Thu Apr 10 15:19:38 CEST 2014
Duration:	44:41 min
Pages:	17

ZÜ I

Übersicht:

1. Organisation der Zentralübung

- Zeit: Do 15.00–16.00 Ort: Physik HS1

  Ausnahmen:

  Siehe Termine auf der Übungswebseite.

- Webseite:

  http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/theo/uebung/

- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Epost: meixner@in.tum.de
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: n.V.
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie
  - ttt-Aufzeichnung
  - Hin.Ti's

2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und Allgemeine didaktische Ziele im Sinne einer Verstärkung des Erfolges beim Studium der THEO.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor- bzw. Hausaufgaben der THEO Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation**

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Informelle **Metasprache** und übergeordnete **Interpretation**
- **Thema der Woche.**

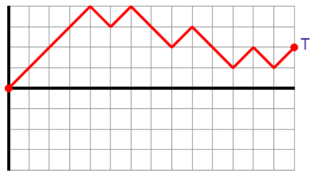
3. Das Ballot-Problem

(DS Vorl. WS 12/13 Prof. Mayr)
Bei einer Wahl erhält Kandidat A a Stimmen, Kandidat B b Stimmen, mit $a > b \geq 0$. Die Stimmzettel werden sequentiell ausgezählt.

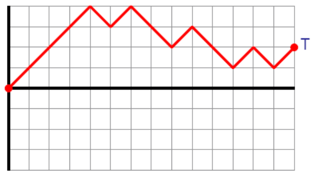
Zählproblem: Wie viele Zählfolgen gibt es, so dass A nach jedem Schritt in Führung ist?

Wir stellen jede Zählfolge durch einen Pfad im ganzzahligen Gitter $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ dar, der vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(a+b, a-b)$ verläuft und bei dem eine Stimme für A (bzw. für B) einer diagonalen Kante um 1 nach rechts und 1 nach oben (bzw. unten) entspricht.

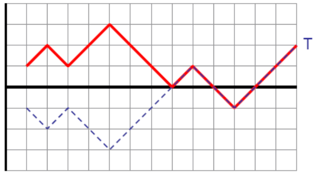
Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten" Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a+b, a-b)$ gleich der Anzahl der „guten" Pfade vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt T ist:

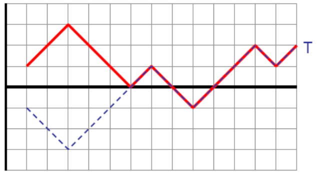


Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der „guten" Pfade vom Ursprung zum Punkt $T := (a+b, a-b)$ gleich der Anzahl der „guten" Pfade vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt T ist:



Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten“ Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:





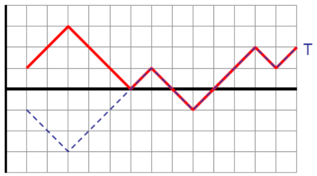
erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten“ Pfade von $(1,1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ zu T ist.

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\text{Anzahl der „guten“ Pfade von } (0,0) \text{ zu } T \\
&= \text{Anzahl der „guten“ Pfade von } (1,1) \text{ zu } \\
&= \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&= \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&= \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a} .
\end{aligned}
$$

Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a-1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

Durch Spiegelung des Anfangsegments eines „schlechten“ Pfades bis zum ersten Zusammentreffen mit der horizontalen Achse an dieser Achse:



erhalten wir, dass die Anzahl der „schlechten“ Pfade von $(1,1)$ zu T gleich der Anzahl aller Pfade von $(1,-1)$ zu T ist.

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\text{Anzahl der „guten“ Pfade von } (0,0) \text{ zu } T \\
&= \text{Anzahl der „guten“ Pfade von } (1,1) \text{ zu } \\
&= \binom{a-1+b}{b} - \binom{(a-1+1)+(b-1)}{a} \\
&= \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{a} \\
&= \frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a} .
\end{aligned}
$$

Die beiden Binomialkoeffizienten ergeben sich, da wir im ersten Fall $a-1$ Schritte nach rechts oben und b Schritte nach rechts unten haben, im zweiten Fall im Vergleich dazu jedoch ein Schritt nach rechts unten in einen nach rechts oben verwandelt wird.

Transformation des Ballot-Problems

Seien $\Sigma = \{(,)\}$ der geordnete Zeichenvorrat mit einer öffnenden bzw. einer schließenden Klammer.

Für $w \in \Sigma^*$ definieren wir $|w|_($ bzw. $|w|_)$ als die Anzahl der in w enthaltenen öffnenden bzw. schließenden Klammern.

u ist ein *Anfangsteilwort* (Praefix) von w, falls es ein Wort v gibt, so dass $w = uv$ gilt.

Wir nennen ein nicht leeres Wort $w \in \Sigma^*$ *positiv*, falls $|u|_(> |u|_)$ für alle nicht leeren Anfangsteilwörter u von w gilt.

Zählproblem: Wie viele positive Wörter über Σ mit a öffnenden und b schließenden Klammern gibt es, wobei $a > b \geq 0$ gelte!

4. Vorbereitung TA Blatt 1

4.1 VA 1

Induktion von Operationen

Sei $(A, \circ)$ eine Algebra.
Dann ist $(\mathcal{P}(A), \circ')$ eine Algebra mit den folgenden Definitionen:

Seien $M, N \subseteq A$.
Dann heißt $\circ'$ die von $\circ$ auf Teilmengen von A induzierte Operation, wobei gilt:

$$M \circ' N := \{m \circ n;\ m \in M, n \in N\}.$$

Kurzschreibweisen: In bekanntem Kontext werden für $M \circ' N$ meist die Kurzschreibweisen $M \circ N$ oder MN verwendet.

Seien Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ formale Sprachen.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. (i) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$.

   (ii) $B \subseteq C \Longrightarrow AB \subseteq AC$.

   Hinweis: Es handelt sich hier um zwei äquivalente Monotonieeigenschaften.
2. $A \subseteq B \Longrightarrow A^n \subseteq B^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
3. $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \subseteq B^*$.

Lösung 1 (i):

Aus $w \in A(B \cap C)$ folgt $w = uv$
für gewisse u, v mit $u \in A$ und $v \in (B \cap C)$.

Damit folgt $uv \in AB$ und $uv \in AC$, d.h. $w \in AB \cap AC$.

Lösung 3:

Sei $A \subseteq B$.
Nach Definition gilt $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$. Wir zeigen
$x \in A^* \Longrightarrow x \in B^*$.

Für ein $x \in A^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $x \in A^n$.

Mit Teilaufgabe 2 folgt $x \in B^n \subseteq B^*$.

Lösung 1 (i):

Aus $w \in A(B \cap C)$ folgt $w = uv$
für gewisse u, v mit $u \in A$ und $v \in (B \cap C)$.

Damit folgt $uv \in AB$ und $uv \in AC$, d.h. $w \in AB \cap AC$.

Lösung 3:

Sei $A \subseteq B$.
Nach Definition gilt $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$. Wir zeigen
$x \in A^* \Longrightarrow x \in B^*$.

Für ein $x \in A^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $x \in A^n$.

Mit Teilaufgabe 2 folgt $x \in B^n \subseteq B^*$.

4.2 VA 2

Wir nennen eine Phrasenstrukturgrammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ *nullierbar kontextfrei*, wenn alle Regeln aus P die Form $A \underset{P}{\rightarrow} \alpha$ mit $A \in V$, $\alpha \in \Gamma^*$ und $\Gamma = V \cup \Sigma$ besitzen.
Γ^* heißt Menge der Satzformen über dem Vokabular Γ.

Sei G eine nullierbar kontextfreie Grammatik.

1. Man zeige für alle $u, v, w \in \Gamma^*$ die Zerlegungseigenschaft
$uv \underset{G}{\rightarrow} w \implies (\exists\, u', v' \in \Gamma^*)[\, u \underset{G}{\rightarrow}^* u' \wedge v \underset{G}{\rightarrow}^* v' \wedge u'v' = w\,]$.
2. Es gilt für alle $u, v \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma$ und $n \in \mathbb{N}_0$
$uv \underset{G}{\rightarrow}^* a^n \implies (\exists\, p, q \in \mathbb{N}_0)[p+q = n \wedge u \underset{G}{\rightarrow}^* a^p \wedge v \underset{G}{\rightarrow}^* a^q]$.