Script **generated by TTT**

Title: Meixner: ZUE_THEO (08.05.2014)

Date: Thu May 08 15:11:08 CEST 2014

Duration: 51:27 min

Pages: 24

SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/theo/uebung/

8. Mai 2014

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

Übrigens:
Man kann durch 2-maligen Münzwurf tatsächlich 2 Aufgaben gleichverteilt aus 4 Aufgaben auswählen!

Lösen Sie Zusatzaufgabe 1 bei DWT!

2. Thema: Pumping Lemma

Das Pumping Lemma wird in der VL in drei Varianten behandelt:

1. Pumping Lemma für reguläre Sprachen
2. Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen
3. Ogden-Lemma für kontextfreie Sprachen

In jedem Fall ist das Lemma eine Aussage über die Abgeschlossenheit der Sprachen gegenüber gewissen unendlichen Mengen mit einer gewissen iterativen Struktur.

Allerdings gibt es nichtreguläre bzw. nichtkontextfreie Sprachen, die diese Abgeschlossenheitseigenschaften ebenfalls besitzen.

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär bzw. kontextfrei. Dann gibt es eine reguläre bzw. kontextfreie Pumping-Lemma-Zahl $n \in \mathbb{N}$,

d.h., dass für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:

z ist zerlegbar in $z = wxy$, so dass:	bzw.	z ist zerlegbar in $z = uvwxy$, so dass:
1. $|x| \geq 1$		1. $|vx| \geq 1$
2. $|wx| \leq n$		2. $|vwx| \leq n$
und		und
3. $\forall i \geq 0: \quad wx^iy \in L$		3. $\forall i \geq 0: \quad uv^iwx^iy \in L$

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär bzw. kontextfrei. Dann gibt es eine reguläre bzw. kontextfreie Pumping-Lemma-Zahl $n \in \mathbb{N}$,

d.h., dass für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gilt:

z ist zerlegbar in $z = wxy$, so dass:	bzw.	z ist zerlegbar in $z = uvwxy$, so dass:
1. $|x| \geq 1$		1. $|vx| \geq 1$
2. $|wx| \leq n$		2. $|vwx| \leq n$
und		und
3. $\forall i \geq 0: \quad wx^iy \in L$		3. $\forall i \geq 0: \quad uv^iwx^iy \in L$

Wir definieren eine Kennzeichnung M von Vorkommen von Buchstaben in einem Wort w als

Markierung von m Vorkommen.

Eine Markierung von 3 Buchstaben in $w = abbaccd$ ist beipielsweise durch $w = abbaccd$ gegeben.

Die Länge $|w|_M$ eines Wortes w bezüglich einer Markierung M ist dann die Anzahl von Markierungen in w.

Beispiel: $|abbaccd|_M = 3$.

Ogden-Lemma:

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass

für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und
für alle Markierungen M von $m \geq n$ Buchstaben in z:

z ist zerlegbar in $z = uvwxy$, so dass:	z.Vgl.	z ist zerlegbar in $z = uvwxy$, so dass:
1. $|vx|_M \geq 1$		1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx|_M \leq n$		2. $|vwx| \leq n$
und		und
3. $\forall i \geq 0: \quad uv^iwx^iy \in L$		3. $\forall i \geq 0: \quad uv^iwx^iy \in L$

Ogden-Lemma:

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Dann
gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass

für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und
für alle Markierungen M von $m \geq n$ Buchstaben in z:

z ist zerlegbar in $z = uvwxy$, so dass: 1. $|vx|_M \geq 1$ 2. $|vwx|_M \leq n$ und 3. $\forall i \geq 0: \quad uv^iwx^iy \in L$	z.Vgl.	z ist zerlegbar in $z = uvwxy$, so dass: 1. $|vx| \geq 1$ 2. $|vwx| \leq n$ und 3. $\forall i \geq 0: \quad uv^iwx^iy \in L$

Die Beweise der Lemmata hängen zusammen mit folgenden Aufgaben der Übungsblätter:

1. HA 2 von Blatt 4
2. TA 1 von Blatt 4

In allen Fällen geht es darum, dass sich in Ableitungen ab einer gewissen Länge Produktionsanwendungen produktiv wiederholen müssen.

Was kann man u.U. mit den Lemmata beweisen?

Man kann für eine mengentheoretisch gegebene Sprache L unter Umständen beweisen,
dass L **nicht** regulär bzw. **nicht** kontextfrei ist.

Beweistechnik siehe Beispiele und Übungsaufgaben!

3. Vorbereitung VA Blatt 4

3.1 VA 1

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Kann man mit einem regulären Ausdruck kontextfreie Grammatiken beschreiben?
2. Wie kann man entscheiden, ob die Sprache einer CFG endlich ist?

3.2 VA 2

1. Sei $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{ab^{2i}cd^ie \mid i \in \mathbb{N}\}$
   nicht regulär ist.
2. Sei $\Sigma = \{1\}$.
   Zeigen Sie, dass die Sprache $P = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$
   nicht regulär ist.

Sei $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$.
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{ab^{2i}cd^ie \mid i \in \mathbb{N}\}$
nicht regulär ist.

Lösung 1.:

Wir nehmen an, dass L regulär ist, und leiten wie folgt einen Widerspruch her.

Zunächst folgt für eine Pumping-Lemma Zahl $n \in \mathbb{N}$ (also $n > 0$) für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ die Eigenschaft

$$\exists w, x, y \in \Sigma^* : \begin{array}{ll} 1. & z = wxy\,, \\ 2. & x \neq \epsilon\,, \\ 3. & |wx| \leq n\,, \\ 4. & wx^iy \in L, \forall i \geq 0\,. \end{array}$$

Dass diese Eigenschaft nicht für alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ gelten kann, zeigt man z. B. mit dem Wort $z = ab^{2n}cd^ne$.

Für dieses Wort $z = ab^{2n}cd^ne$ ist zunächst klar, dass $|z| \geq n$.
Und es ist klar, dass z in L enthalten ist.
Deshalb kann man eine Zerlegbarkeit von z annehmen, so dass Eigenschaften 1. bis 4. gelten.

Sei also $z = wxy$ mit $x \neq \epsilon$, $|wx| \leq n$ und $wx^iy \in L, \forall i \geq 0$.

Wegen $|wx| \leq n$ kann x kein c, d oder e enthalten.
Dann muss also x aus a's und/oder b's bestehen, und, da x nicht leer ist, folglich mit a oder b enden.

Beide Fälle führen wir wie folgt zum Widerspruch.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $|w|_x$ die Anzahl der Buchstaben x, die in w enthalten sind.

Falls x mit a endet, dann gilt $|wx^2y|_a > 1$. Daraus folgt $wx^2y \notin L$ im Widerspruch zu Eigenschaft 4. für $i = 2$.

Falls x mit b endet, dann gilt $|wx^0y|_b < 2n$ und $|wx^0y|_d = n$.
Daraus folgt ebenfalls $wx^0y \notin L$ im Widerspruch zu Eigenschaft 4. für $i = 0$.

Man beachte, dass im Beweis alle Eigenschaften 1. bis 4. verwendet wurden.

Sei $\Sigma = \{1\}$.
Zeigen Sie, dass die Sprache $P = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$ nicht regulär ist.

Lösung 2.:

Wir nehmen an, dass $L = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$ regulär ist. Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl.

Da die Menge der Primzahlen bekanntlich unendlich ist, gibt es eine Primzahl p bzw. ein $z = 1^p \in L$, so dass z mindestens n Zeichen enthält, also $|z| \geq n$.

Sei also $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei $z = wxy$ mit $|wx| \leq n$, x nicht leer und $wx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Wegen $wy = wx^0y \in L$ ist $|ww|$ eine Primzahl.

Wir setzen $p = wx^{|wx|}y$.
Es gilt $p \in L$, d. h. $|p|$ ist eine Primzahl.

Es folgt aber auch $|p| = |wy| + |wy||x| = |wy|(1 + |x|)$, d. h. $|xp|$ ist wegen $|x| \neq 0$ keine Primzahl.

Widerspruch!

4zue03.pdf - Adobe Acrobat Professional
File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Sei also $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei $z = wxy$ mit $|wx| \leq n$, x nicht leer und $wx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Wegen $wy = wx^0y \in L$ ist $|ww|$ eine Primzahl.

Wir setzen $p = wx^{|wx|}y$.
Es gilt $p \in L$, d. h. $|p|$ ist eine Primzahl.

Es folgt aber auch $|p| = |wy| + |wy||x| = |wy|(1 + |x|)$, d. h. $|xp|$ ist wegen $|x| \neq 0$ keine Primzahl.

Widerspruch!

4zue03.pdf - Adobe Acrobat Professional
File Edit View Document Comments Forms Tools Advanced Window Help

Sei also $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei $z = wxy$ mit $|wx| \leq n$, x nicht leer und $wx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Wegen $wy = wx^0y \in L$ ist $|ww|$ eine Primzahl.

Wir setzen $p = wx^{|wx|}y$.
Es gilt $p \in L$, d. h. $|p|$ ist eine Primzahl.

Es folgt aber auch $|p| = |wy| + |wy||x| = |wy|(1 + |x|)$, d. h. $|xp|$ ist wegen $|x| \neq 0$ keine Primzahl.

Widerspruch!

4zue03.pdf - Adobe Acrobat Professional

Sei $\Sigma = \{1\}$.
Zeigen Sie, dass die Sprache $P = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$ nicht regulär ist.

Lösung 2.:

Wir nehmen an, dass $L = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$ regulär ist. Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl.

Da die Menge der Primzahlen bekanntlich unendlich ist, gibt es eine Primzahl p bzw. ein $z = 1^p \in L$, so dass z mindestens n Zeichen enthält, also $|z| \geq n$.

4zue03.pdf - Adobe Acrobat Professional

Sei also $z \in L$ mit $|z| \geq n$ und sei $z = wxy$ mit $|wx| \leq n$, x nicht leer und $wx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Wegen $wy = wx^0y \in L$ ist $|uw|$ eine Primzahl.

Wir setzen $p = wx^{|wx|}y$.
Es gilt $p \in L$, d. h. $|p|$ ist eine Primzahl.

Es folgt aber auch $|p| = |wy| + |wy||x| = |wy|(1 + |x|)$, d. h. $|xp|$ ist wegen $|x| \neq 0$ keine Primzahl.

Widerspruch!

4zue03.pdf - Adobe Acrobat Professional

3.3 VA 3

1. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und
$L = \{d^k e^m f^n \ ; \ k, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.
Zeigen Sie, dass die Sprache L kontextfrei ist.
2. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und
$L = \{d^m e^m f^n \ ; \ m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.
Zeigen Sie, dass die Sprache L ein Durchschnitt kontextfreier Sprachen ist.

4zue03.pdf - Adobe Acrobat Professional

Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und
$L = \{d^k e^m f^n \ ; \ k, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.

Zeigen Sie, dass die Sprache L kontextfrei ist.

Lösung 1.:

Es wäre ungeschickt, für L eine kontextfreie Grammatik zu konstruieren. Besser ist es, die Abgeschlossenheit der Klasse der kontextfreien Sprachen zu benutzen.

Wir stellen L dar durch $L = L_1(L_2 \bigcup L_3)$, wobei wir definieren

$$\begin{aligned} L_1 &= \{d^k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}, \\ L_2 &= \{e^m f^n \ ; \ m, n \in \mathbb{N}, m < n\}, \\ L_3 &= \{e^m f^n \ ; \ m, n \in \mathbb{N}, m > n\}. \end{aligned}$$

4zue03.pdf - Adobe Acrobat Professional

Definitionen

Ein Nichtterminal A heißt

1. *erreichbar* gdw es eine Ableitung $S \xrightarrow[G]{}^* \alpha A \beta$ gibt
2. *erzeugend* gdw es eine Ableitung $A \xrightarrow[G]{}^* w \in \Sigma^*$ gibt,
3. *nützlich* gdw es eine Ableitung $S \xrightarrow[G]{}^* \alpha A \beta \xrightarrow[G]{}^* w \in \Sigma^*$ gibt.

Nützliche Nichtterminale sind erreichbar und erzeugend.
Die Umkehrung gilt nicht notwendigerweise (Beweis?)