Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_THEO (15.05.2014)

Date: Thu May 15 15:10:14 CEST 2014

Duration: 53:20 min

Pages: 19

SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/theo/uebung/

15. Mai 2014

ZÜ V

Übersicht:

1. Übungsbetrieb — Fragen, Probleme?
2. Thema — Strukturelle Induktion
   Beispiele
   Sätze
3. Vorbereitung — TA Blatt 5

2. Thema: Strukturelle Induktion

Berechenbarkeitsbegriffe beruhen auf endlichen Regelsystemen, deren Regeln einzeln effektiv angewendet werden können, um Elemente zu erzeugen bzw. zu benennen.

Insgesamt werden dadurch induktiv Mengen dargestellt bzw. erzeugt.

Formal werden die erzeugten Mengen
als Durchschnitt aller Mengen dargestellt,
die in gewissem Sinne abgeschlossen sind gegenüber der Erzeugung von Elementen.

2.1 Beispiele

Grundlegendes Beispiel ist die Erzeugung von Darstellungen von natürlichen Zahlen, bei der es eine Regel gibt, die es erlaubt, an eine schon erzeugte Zahldarstellung durch Anfügen eines Striches die nachfolgende Zahl darzustellen.

Als Startregel kann man das Hinschreiben eines einzelnen Striches zur Darstellung der Zahl 1 betrachten.

Die Menge der natürlichen Zahlen wird dann als kleinste, gegenüber der Regelanwendung abgeschlossenen Menge dargestellt.

VA 1

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Tupel von Mengen $X_1, X_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b\}$.
Wir betrachten das folgende Regelsystem H mit drei Implikationen.

$$H: \quad \begin{array}{lrcl} (1) & true & \Longrightarrow & aa \in X_1\,, \\ (2) & x \in X_2 & \Longrightarrow & xa \in X_1\,, \\ (3) & x \in X_1 & \Longrightarrow & ax \in X_2\,. \end{array}$$

Induktive Beweise hängen eng mit dieser Betrachtungseise zusammen. Sie kann insbesondere bei kontextfreien Sprachen demonstriert werden, wie folgt.

Das Tupel $X = (X_1, X_2)$ heißt H-abgeschlossen, falls die Implikationen (1), (2) und (3) gelten.

1. Seien I eine nicht leere Indexmenge und $Y = (Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von H-abgeschlossenen Mengentupeln $Y_i = (Y_{i,1}, Y_{i,2})$. (Achtung Bezeichnungsänderung!)

   Zeigen Sie, dass der Durchschnitt

   $$\bigcap Y = \left(\bigcap_{i\in I} Y_{i,1}, \bigcap_{i\in I} Y_{i,2}\right).$$

   ebenfalls H-abgeschlossen ist.

Lösung

Die Beweise sind für alle Implikationen gleichartig. Wir betrachten nur die Implikation (2).

Sei $X = (X_1, X_2) = \left(\bigcap_{i\in I} Y_{i,1}, \bigcap_{i\in I} Y_{i,2}\right)$.

Zu zeigen: $\quad x \in X_2 \Longrightarrow xa \in X_1$.

Sei $x \in X_2$.
Dann gilt $x \in Y_{i,2}$ für alle $i \in I$ (Durchschnittseigenschaft).
Da alle Y_i H-abgeschlossen sind, folgt $xa \in Y_{i,1}$ für alle $i \in I$.

Damit folgt $xa \in X_1$ (Durchschnittseigenschaft), mithin gilt Implikation (2).

2. Zeigen Sie, dass es zu jedem Tupel $A = (A_1, A_2)$ ein kleinstes H-abgeschlossenes Tupel A^H gibt, so dass $A \subseteq A^H$.

   Dabei sei die Mengeninklusion komponentenweise auf 2-Tupel erweitert.

   A^H heißt dann die H-abgeschlossene Hülle von A oder die von A erzeugte H-abgeschlossene Menge.

Lösung

Zunächst ist (Σ^*, Σ^*) offenbar ein H-abgeschlossenes Tupel.

Außerdem gilt $A_1 \subseteq \Sigma*$ und $A_2 \subseteq \Sigma*$, d.h. $A \subseteq (\Sigma^*, \Sigma^*)$.

Damit ist die Familie Y aller H-abgeschlossenen Y_i mit $A \subseteq Y_i$ nicht leer.

Damit ist der Durchschnitt $\bigcap Y$ das gesuchte A^H, d.h.

$$A^H = \bigcap (Y_i \,;\, A \subseteq Y_i \text{ und } Y_i \text{ ist } H\text{-abgeschlossen}).$$

3. Seien $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$.

   Beweisen Sie induktiv mit Hilfe der H-Abgeschlossenheit, dass alle Wörter in L_1 aus einer geraden Anzahl von Buchstaben a bestehen.

Lösung

Seien $P \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Wörter geradzahliger Länge, und $Q \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Wörter ungeradzahliger Länge.

Dann ist (P, Q) offenbar H-abgeschlossen, denn
Regel (1): $aa \in P$,
Regel (2): aus $x \in Q$ folgt $xa \in P$, und
Regel (3): aus $x \in P$ folgt $ax \in Q$.

Es folgt

$$(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H = (\emptyset, \emptyset)^H \cap (P, Q),$$

d.h. $L_1 \subseteq P$, mithin sind alle Wörter aus L_1 geradzahlig.

4. Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aa \mid Ba\,, \\ B &\rightarrow aS\,. \end{aligned}$$

Sei $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$.

Zeigen Sie $L_G = L_1$.

Bemerkung:
Das Regelsystem H und die Grammatik G entsprechen sich in kanonischer Weise.

Lösung

Wir setzen $L_S = \{w\,;\, S \xrightarrow[G]{}^* w\}$ und $L_B = \{w\,;\, B \xrightarrow[G]{}^* w\}$.

(L_S, L_B) ist nach Konstruktion H-abgeschlossen,
und natürlich gilt $(\emptyset, \emptyset) \subseteq (L_S, L_B)$.

Daraus folgt $(L_1, L_2) \subseteq (L_S, L_B)$.

Die Umkehrung $(L_S, L_B) \subseteq (L_1, L_2)$ folgt mit einem Induktionsargument und dem folgenden Sachverhalt:

$(y_1, y_2) \in (\emptyset, \emptyset)^H = (L_1, L_2)$ mit $y_1 \neq aa$ impliziert:

Es existieren $x_1 \in L_1$ und $x_2 \in L_2$, so dass gilt
$y_1 = x_2a$ und $y_2 = ax_1$.

Andernfalls könnte man y_1 und y_2 aus (L_1, L_2) entfernen, ohne die H-Abgeschlossenheit zu verletzen.

Nun zeigt man induktiv, dass $(L_S, L_B) \subseteq (L_1, L_2)$ gilt.

Die Umkehrung $(L_S, L_B) \subseteq (L_1, L_2)$ folgt mit einem Induktionsargument und dem folgenden Sachverhalt:

$(y_1, y_2) \in (\emptyset, \emptyset)^H = (L_1, L_2)$ mit $y_1 \neq aa$ impliziert:

Es existieren $x_1 \in L_1$ und $x_2 \in L_2$, so dass gilt
$y_1 = x_2a$ und $y_2 = ax_1$.

Andernfalls könnte man y_1 und y_2 aus (L_1, L_2) entfernen, ohne die H-Abgeschlossenheit zu verletzen.

Nun zeigt man induktiv, dass $(L_S, L_B) \subseteq (L_1, L_2)$ gilt.

2.2 Sätze

Satz 1

Kontextfreie Sprachen mit Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ und Produktionen der Form

$$A_i \to w_0 A_{i_1} w_1 \ldots w_{n-1} A_{i_n} w_n$$

können äquivalent durch ein korrespondierendes Regelsystem H definiert werden mit den folgenden Regeln:

$$u_1 \in L_G(A_{i_1}) \wedge \ldots \wedge u_n \in L_G(A_{i_n}) \implies u w_0 u_1 w_1 \ldots w_{n-1} u_n w_n \in L_G(A_i)\,.$$

Hinweis: Umsetzung analog VA 1.

Satz 2

Aussagen der Form

$$\forall u_1 \in L_G(A_1), \ldots, u_n \in L_G(A_k): \quad P(u_1) \wedge \ldots \wedge P(u_k)$$

werden bewiesen, indem man für jede Produktion Folgendes zeigt:

$$P_{i_1}(u_1) \wedge \ldots \wedge P_{i_n}(u_n) \implies P_i(u w_0 u_1 w_1 \ldots w_{n-1} u_n w_n)\,.$$

Anwendung: VA 1.

3. Vorbereitung TA Blatt 5

3.1 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta(q, \epsilon, Z_0) &= \{(q, XZ)\}\,, & \delta(q, a, X) &= \{(q, XY)\}\,,\\ \delta(q, \#, X) &= \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, b, Y) &= \{(q, \epsilon)\}\,,\\ \delta(q, a, Z) &= \{(q, \epsilon)\}\,. \end{aligned}$$

3. Vorbereitung TA Blatt 5

3.1 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta(q, \epsilon, Z_0) &= \{(q, XZ)\}\,, & \delta(q, a, X) &= \{(q, XY)\}\,,\\ \delta(q, \#, X) &= \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, b, Y) &= \{(q, \epsilon)\}\,,\\ \delta(q, a, Z) &= \{(q, \epsilon)\}\,. \end{aligned}$$

ZÜ THEO ©Dr. Werner Meixner 3.1 VA 2 17/20