Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_THEO (22.05.2014)

Date: Thu May 22 15:09:08 CEST 2014

Duration: 51:47 min

Pages: 30

SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/theo/uebung/

22. Mai 2014

ZÜ V

Übersicht:

1. Übungsbetrieb — Fragen, Probleme?; Termine
2. Thema — Kellerautomaten; Sätze
3. Vorbereitung — VA Blatt 6

--

2. Thema: Kellerautomaten

Man kann einer kontextfreien Grammatik G wie folgt einen nichtdeterministischen Kellerautomaten K zuordnen, der die Sprache $L(G)$ mit leerem Keller erkennt bzw. akzeptiert.

Satz 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei.
Wir definieren $K = (\{q_0\}, \Sigma, \Gamma, q_0, S, \delta, \emptyset)$ mit δ ausschließlich wie folgt:

- Für jede Regel $A \to \alpha$: $(q_0, \alpha) \in \delta(q_0, \epsilon, A)$,
- Für alle $a \in \Sigma$: $(q_0, \epsilon) \in \delta(q_0, a, a)$.

Distance Tool
Options
Measurement
Distance:
Angle:
Cursor Location
ΔX:
ΔY:
Units and Markup Settings
Scale Ratio: 1 mm = 1 mm
Measurement Markup
Label:

…lübung am 12. Juni findet nicht statt!

:

2. Thema: Kellerautomaten

Man kann einer kontextfreien Grammatik G wie folgt einen nichtdeterministischen Kellerautomaten K zuordnen, der die Sprache $L(G)$ mit leerem Keller erkennt bzw. akzeptiert.

Satz 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei.
Wir definieren $K = (\{q_0\}, \Sigma, \Gamma, q_0, S, \delta, \emptyset)$ mit δ ausschließlich wie folgt:

- Für jede Regel $A \to \alpha$: $(q_0, \alpha) \in \delta(q_0, \epsilon, A)$,
- Für alle $a \in \Sigma$: $(q_0, \epsilon) \in \delta(q_0, a, a)$.

Satz 2

Sei $K = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$ ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann kann man eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, die $L(K)$ erzeugt, wie folgt definieren:

Satz 2

Sei $K = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$ ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann kann man eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, die $L(K)$ erzeugt, wie folgt definieren:

$$G = (V, T, P, S)$$

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tupel mit $[,,]$ notieren

$P \ni S \to [q_0, Z_0, q]$ für $q \in Q$

$P \ni [q, Z, q_m] \to a[p, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \cdots [q_{m-1}, Z_m, q_m]$

für $\delta(q, a, Z) \ni (p, Z_1 \cdots Z_m), \forall q_1, \ldots, q_m \in Q$,

mit $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Satz 2

Sei $K = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$ ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann kann man eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, die $L(K)$ erzeugt, wie folgt definieren:

$$G = (V, T, P, S)$$

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tupel mit $[,,]$ notieren

$P \ni S \to [q_0, Z_0, q]$ für $q \in Q$

$P \ni [q, Z, q_m] \to a[p, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \cdots [q_{m-1}, Z_m, q_m]$

für $\delta(q, a, Z) \ni (p, Z_1 \cdots Z_m), \forall q_1, \ldots, q_m \in Q$,

mit $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

3. Vorbereitung TA Blatt 6

Wir greifen das Thema der induktiven Korrektheitsbeweise auf.

Das zweite Thema ist dann die äquivalente Transformation von Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken.

3.1 VA 1

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \to aSb \mid SS \mid \epsilon\,,$$
$$T \to TaTb \mid \epsilon\,.$$

Zeigen Sie jeweils per Induktion:

Letztendlich besagen (1) zusammen mit (4) die Gleichheit der Sprachen $L(S)$ und $L(T)$, d.h., $L_G(S) = L(S) = L(T) = L_G(T)$.

Teilaufg. 1.:

$L(T) \subseteq L(S)$.

Es gibt T-Regeln und S-Regeln. Aus den T-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem T mit zwei Implikationen für eine Menge X:

$$T: \quad \begin{array}{ll} (1) & \mathit{true} \implies \epsilon \in X\,, \\ (2) & x, y \in X \implies xayb \in X\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(S)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von T-Regeln,
d.h.,

$$T: \quad \begin{array}{ll} (1) & \mathit{true} \implies \epsilon \in L(S)\,, \\ (2) & x, y \in L(S) \implies xayb \in L(S)\,. \end{array}$$

3.1 VA 1

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \rightarrow aSb \mid SS \mid \epsilon\,,$$
$$T \rightarrow TaTb \mid \epsilon\,.$$

Zeigen Sie jeweils per Induktion:

1. $L(T) \subseteq L(S)$.
2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.
3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.
4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Letztendlich besagen (1) zusammen mit (4) die Gleichheit der Sprachen $L(S)$ und $L(T)$, d.h., $L_G(S) = L(S) = L(T) = L_G(T)$.

Teilaufg. 1.:

$L(T) \subseteq L(S)$.

Es gibt T-Regeln und S-Regeln. Aus den T-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem T mit zwei Implikationen für eine Menge X:

$$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & true \Longrightarrow & \epsilon \in X\,, \\ (2) & x, y \in X \Longrightarrow & xayb \in X\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(S)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von T-Regeln,
d.h.,

$$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & true \Longrightarrow & \epsilon \in L(S)\,, \\ (2) & x, y \in L(S) \Longrightarrow & xayb \in L(S)\,. \end{array}$$

Teilaufg. 1.:

$L(T) \subseteq L(S)$.

Es gibt T-Regeln und S-Regeln. Aus den T-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem T mit zwei Implikationen für eine Menge X:

$$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & true \Longrightarrow & \epsilon \in X\,, \\ (2) & x, y \in X \Longrightarrow & xayb \in X\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(S)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von T-Regeln,
d.h.,

$$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & true \Longrightarrow & \epsilon \in L(S)\,, \\ (2) & x, y \in L(S) \Longrightarrow & xayb \in L(S)\,. \end{array}$$

ZÜ THEO
©Dr. Werner Meixner 3.1 VA 1 9/14

Beweis

(1): Es gilt $\epsilon \in L(S)$.

(2): Seien $x, y \in L(S)$.
Dann gibt es die Ableitung $S \xrightarrow[P]{} SS \xrightarrow[G]{} SaSb \xrightarrow[G]{}^* xaSb \xrightarrow[G]{}^* xayb$,
d.h., $xayb \in L(S)$.

Es folgt die T-Abgeschlossenheit für $L(S)$.
Da $L(T)$ die T-abgeschlossene Hülle von $\emptyset$ ist, folgt $L(T) \subseteq L(S)$.

Teilaufg. 1.:

$L(T) \subseteq L(S)$.

Es gibt T-Regeln und S-Regeln. Aus den T-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem T mit zwei Implikationen für eine Menge X:

$$T: \quad \begin{array}{ll} (1) & true \implies \epsilon \in X\,, \\ (2) & x, y \in X \implies xayb \in X\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(S)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von T-Regeln,
d.h.,

$$T: \quad \begin{array}{ll} (1) & true \implies \epsilon \in L(S)\,, \\ (2) & x, y \in L(S) \implies xayb \in L(S)\,. \end{array}$$

Teilaufg. 4.:

$L(S) \subseteq L(T)$.

Aus den S-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem S mit drei Implikationen für eine Menge X:

$$S: \quad \begin{array}{ll} (1) & true \implies \epsilon \in X\,, \\ (2) & x \in X \implies axb \in X\,, \\ (3) & x, y \in X \implies xy \in X\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(T)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von S-Regeln, d.h.,

$$S: \quad \begin{array}{lll} (1) & true \implies \epsilon \in L(T)\,, & \\ (2) & w \in L(T) \implies awb \in L(T)\,, & \text{(Aufg. 2)} \\ (3) & v, w \in L(T) \implies vw \in L(T)\,. & \text{(Aufg. 3)} \end{array}$$

Teilaufg. 4.:

$L(S) \subseteq L(T)$.

Aus den S-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem S mit drei Implikationen für eine Menge X:

$$S: \quad \begin{array}{ll} (1) & true \implies \epsilon \in X\,, \\ (2) & x \in X \implies axb \in X\,, \\ (3) & x, y \in X \implies xy \in X\,. \end{array}$$

Dann ist zu zeigen, dass $L(T)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von S-Regeln, d.h.,

$$S: \quad \begin{array}{lll} (1) & true \implies \epsilon \in L(T)\,, & \\ (2) & w \in L(T) \implies awb \in L(T)\,, & \text{(Aufg. 2)} \\ (3) & v, w \in L(T) \implies vw \in L(T)\,. & \text{(Aufg. 3)} \end{array}$$

Beweis

(1): Es gilt $\epsilon \in L(T)$.

(2): Sei $w \in L(T)$.
Dann gibt es die Ableitung $T \xrightarrow[P]{} TaTb \xrightarrow[G]{} aTb \xrightarrow[G]{}^* awb$,
d.h., $awb \in L(T)$.

(3): Seien $v, w \in L(T)$.
Dann gibt es ein $w' \in \Sigma^*$ und eine Ableitung $T \xrightarrow[G]{}^* Tw \xrightarrow[G]{} w$, da die Reihenfolge der terminalen ϵ-Produktionen beliebig wählbar ist und zuvor stets eine Variable T am Wortanfang steht (das kann ebenfalls induktiv bewiesen werden).

Es folgt $T \xrightarrow[G]{}^* Tw \xrightarrow[G]{}^* vw$, d.h. $vw \in L(T)$.

Es folgt die S-Abgeschlossenheit für $L(T)$.

Da $L(S)$ die S-abgeschlossene Hülle von $\emptyset$ ist, folgt $L(S) \subseteq L(T)$.

3.2 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ mit $\Sigma=\{a,b,\#\}$, $\Gamma=\{Z_0,X,Y,Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta(q,\epsilon,Z_0) &= \{(q,XZ)\}\,, & \delta(q,a,X) &= \{(q,XY)\}\,,\\ \delta(q,\#,X) &= \{(q,\epsilon)\}\,, & \delta(q,b,Y) &= \{(q,\epsilon)\}\,,\\ \delta(q,a,Z) &= \{(q,\epsilon)\}\,. \end{aligned}$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis: $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta,\emptyset)$.

Lösung

Anwendung der Methode aus der Vorlesung, allerdings können alle Tripel $[p,A,q]$ vereinfacht werden zu A, weil es nur einen Zustand gibt.

$$\begin{aligned} S &\to Z_0\,, & & & & \\ Z_0 &\to XZ\,, & X &\to aXY\,, & & \\ X &\to \#\,, & Y &\to b\,, & Z &\to a\,. \end{aligned}$$

3.2 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ mit $\Sigma=\{a,b,\#\}$, $\Gamma=\{Z_0,X,Y,Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta(q,\epsilon,Z_0) &= \{(q,XZ)\}\,, & \delta(q,a,X) &= \{(q,XY)\}\,,\\ \delta(q,\#,X) &= \{(q,\epsilon)\}\,, & \delta(q,b,Y) &= \{(q,\epsilon)\}\,,\\ \delta(q,a,Z) &= \{(q,\epsilon)\}\,. \end{aligned}$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis: $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta,\emptyset)$.

Lösung

Anwendung der Methode aus der Vorlesung, allerdings können alle Tripel $[p,A,q]$ vereinfacht werden zu A, weil es nur einen Zustand gibt.

$$\begin{aligned} S &\to Z_0\,, & & & & \\ Z_0 &\to XZ\,, & X &\to aXY\,, & & \\ X &\to \#\,, & Y &\to b\,, & Z &\to a\,. \end{aligned}$$

3.2 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ mit $\Sigma=\{a,b,\#\}$, $\Gamma=\{Z_0,X,Y,Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{rclrcl} \delta(q,\epsilon,Z_0) &=& \{(q,XZ)\}\,, & \delta(q,a,X) &=& \{(q,XY)\}\,,\\ \delta(q,\#,X) &=& \{(q,\epsilon)\}\,, & \delta(q,b,Y) &=& \{(q,\epsilon)\}\,,\\ \delta(q,a,Z) &=& \{(q,\epsilon)\}\,. & & & \end{array}$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis: $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta,\emptyset)$.

Lösung

Anwendung der Methode aus der Vorlesung, allerdings können alle Tripel $[p,A,q]$ vereinfacht werden zu A, weil es nur einen Zustand gibt.

$$\begin{array}{rclrclrcl} S &\to& Z_0\,, & & & & & & \\ Z_0 &\to& XZ\,, & X &\to& aXY\,, & & & \\ X &\to& \#\,, & Y &\to& b\,, & Z &\to& a\,. \end{array}$$

3.2 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ mit $\Sigma=\{a,b,\#\}$, $\Gamma=\{Z_0,X,Y,Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{rclrcl} \delta(q,\epsilon,Z_0) &=& \{(q,XZ)\}\,, & \delta(q,a,X) &=& \{(q,XY)\}\,,\\ \delta(q,\#,X) &=& \{(q,\epsilon)\}\,, & \delta(q,b,Y) &=& \{(q,\epsilon)\}\,,\\ \delta(q,a,Z) &=& \{(q,\epsilon)\}\,. & & & \end{array}$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis: $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta,\emptyset)$.

ZÜ THEO ©Dr. Werner Meixner 3.2 VA 2 13/14

3.2 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ mit $\Sigma=\{a,b,\#\}$, $\Gamma=\{Z_0,X,Y,Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{rclrcl} \delta(q,\epsilon,Z_0) &=& \{(q,XZ)\}\,, & \delta(q,a,X) &=& \{(q,XY)\}\,,\\ \delta(q,\#,X) &=& \{(q,\epsilon)\}\,, & \delta(q,b,Y) &=& \{(q,\epsilon)\}\,,\\ \delta(q,a,Z) &=& \{(q,\epsilon)\}\,. & & & \end{array}$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis: $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K=(\{q\},\Sigma,\Gamma,q,Z_0,\delta,\emptyset)$.

ZÜ THEO ©Dr. Werner Meixner 3.2 VA 2 13/14

Lösung

Anwendung der Methode aus der Vorlesung, allerdings können alle Tripel $[p, A, q]$ vereinfacht werden zu A, weil es nur einen Zustand gibt.

$$
\begin{array}{lllllllll}
S & \to & Z_0\,, & & & & & & \\
Z_0 & \to & XZ\,, & X & \to & aXY\,, & & & \\
X & \to & \#\,, & Y & \to & b\,, & Z & \to & a\,.
\end{array}
$$

3.2 VA 2

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$
\begin{array}{lcllcl}
\delta(q, \epsilon, Z_0) & = & \{(q, XZ)\}\,, & \delta(q, a, X) & = & \{(q, XY)\}\,, \\
\delta(q, \#, X) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, b, Y) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, \\
\delta(q, a, Z) & = & \{(q, \epsilon)\}\,. & & &
\end{array}
$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

Hinweis: $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta, \emptyset)$.

Lösung

Anwendung der Methode aus der Vorlesung, allerdings können alle Tripel $[p, A, q]$ vereinfacht werden zu A, weil es nur einen Zustand gibt.

$$
\begin{array}{lllllllll}
S & \to & Z_0\,, & & & & & & \\
Z_0 & \to & XZ\,, & X & \to & aXY\,, & & & \\
X & \to & \#\,, & Y & \to & b\,, & Z & \to & a\,.
\end{array}
$$