Script generated by TTT

Title: Meixner: ZUE_THEO (26.06.2014)

Date: Thu Jun 26 15:06:11 CEST 2014

Duration: 45:14 min

Pages: 22

ZÜ VII Übersicht: 1. Übungsbetrieb Fragen, Probleme? Klausur! 2. Thema Erweiterte PR Regeln 3. Vorbereitung Blatt 10

SS 2014

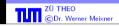
Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/theo/uebung/

26. Juni 2014





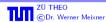
2. Thema Erweiterte PR Regeln

Die Konstruktion von primitiv-rekursiven Funktionen stützt sich wesentlich auf die Erzeugungsregeln für funktionale Ausdrücke.

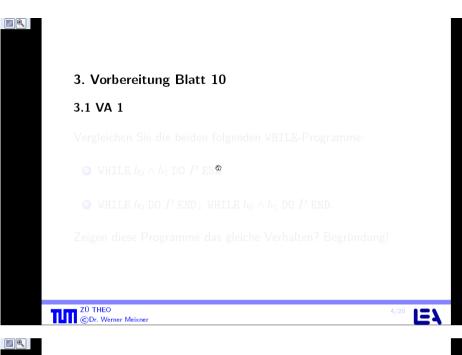
Die Regeln dafür kann man weit oder eng fassen in Abhängigkeit davon, welchen Schwerpunkt man auf die Beweise legt.

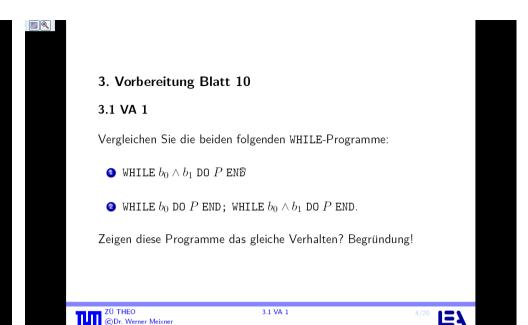
Die sogenannten erweiterten PR Regeln lassen in gewissem Sinne die Bildung aller funktionalen Ausdrücke zu.

Siehe Vorbereitungsaufgaben

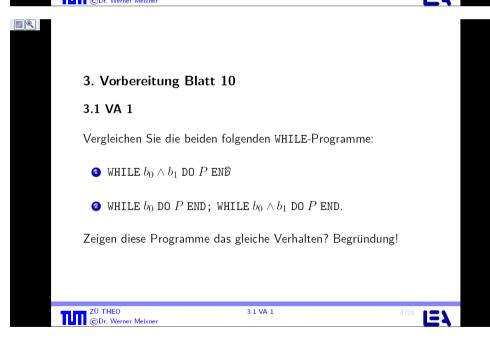








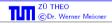






Lösung

Das Programm 2 terminiert wicht, wenn man voraussetzt,





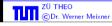
3. Vorbereitung Blatt 10

3.1 VA 1

Vergleichen Sie die beiden folgenden WHILE-Programme:

- WHILE $b_0 \wedge b_1$ DO P EN®
- ② WHILE b_0 DO P END; WHILE $b_0 \wedge b_1$ DO P END.

Zeigen diese Programme das gleiche Verhalten? Begründung!



3.1 VA 1





Lösung

Die beiden Programme zeigen nicht das gleiche Verhalten!

Das Programm 2 terminierte icht, wenn man voraussetzt,



3.2 VA 2

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind:

$$iszero(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mathsf{falls} \ x \not \equiv 0 \\ 0 & \mathsf{sonst} \end{array} \right. , \quad eq(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mathsf{falls} \ x = y \\ 0 & \mathsf{sonst} \end{array} \right. .$$

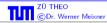


Lösung

Wir schreiben die primitiv-rekursiven Basis-Projektionsfunktioner $proj_{k,i}(x_1, x_2, ..., x_k)$ als $\pi_i^k(x_1, x_2, ..., x_k)$.

Wir definieren zunächst die primitiv-rekursiven arithmetischen Funktionen add(x,y), $m \otimes t(x,y)$, $\dot{-}(x,y)$ bzw. in üblicher Infixschreibweise x+y, $x\cdot y$, $x\dot{-}y$

$$\dot{-}(x|y) = \max\{x - y|0\}$$



7/2



Addition

Lesbare Kurzschrift zuerst

$$0 + y = y,$$

 $(x + 1) + y = s(x + y).$

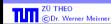
odei

$$add(0,y) = y,$$

$$add(x+1,y) = \P(add(x,y))$$

Syntaktisches Format

$$\begin{array}{rcl} h(r,x,y) & = & s(\pi_1^3(r,x,y)) \,, \\ \\ add(0,y) & = & \pi_1^1(y) \,, \\ add(x+1,y) & = & h(add(x,y),x,y) \,. \end{array}$$







Multiplikation

Lesbare Kurzschrift zuerst:

$$\begin{array}{rcl} 0 \cdot y) & = & 0 \, , \\ (x+1) \cdot y & = & (x \cdot y) + y \, . \end{array}$$

oder

$$mult(0,y) = 0$$
,
 $mult(x+1,y) = add(mult(x,y),y)$

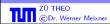
Syntaktisches Format

$$k(y) = 0,$$

$$h(r, x, y) = add(\pi_1^3(r, x, y), \pi_3^3(r, x, y))$$

$$mult(0, y) = k(y),$$

$$t(x + 1, y) = h(mult(x, y), x, y).$$







Modifizierte Subtraktion

Lesbare Kurzschrift zuerst

$$\begin{array}{rcl} pred(0) & = & 0 \,, \\ pred(x+1) & = & x \,, \\ x & \stackrel{\bullet}{=} & 0 & = & x \,, \\ x & \stackrel{\bullet}{=} & (y+1) & = & pred(x & \stackrel{\bullet}{=} & y) \,. \end{array}$$



Syntaktisches Format:

$$\begin{array}{rcl} h_1(r,x) & = & \pi_2^2(r,x)\,, \\ pred(0) & = & 0\,, \\ pred(x+1) & = & h_1(pred(x),x)\,, \\ \\ h_2(r,x,y) & = & \gcd(\pi_1^3(r,x,y))\,, \\ \\ \dot{-}^R(0,x) & = & \pi_1^1(x)\,, \\ \\ \dot{-}^R(y+1,x) & = & h_2(\dot{-}^R(y,x),y,x)\,, \\ \\ \dot{-}(x,y) & = & \dot{-}^R(y,x)\,. \end{array}$$



3.2 VA 2



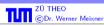
Syntaktisches Format:

$$\begin{array}{rcl} h_1(r,x) & = & \pi_2^2(r,x) \,, \\ pred(0) & = & 0 \,, \\ pred(x+1) & = & h_1(pred(x),x) \,, \\ \\ h_2(r,x,y) & = & \gcd(\pi_1^3(r,x,y)) \,, \\ \\ \dot{-}^R(0,x) & = & \pi_1^1(x) \,, \\ \\ \dot{-}^R(y+1,x) & = & h_2(\dot{-}^R(y,x),y,x) \,, \\ \\ \dot{-}(x,y) & = & \dot{-}^R(y,x) \,. \end{array}$$



3.2 VA 2

E



E

Lösung in lesbarer Form:

$$\begin{array}{rcl} iszero(0) & = & 1 \; , \\ iszero(x+1) & = & 0 \; , \\ \\ eq(x,y) & = & iszero((x \dot{-}y) + (y \dot{-}x)) \; . \end{array}$$

3.3 VA 3

Sei f(x,y) primitiv rekursiv.

Zeigen Sie mit Hilfe der Projektionsfunktionen π_i^k zusammen mit der (nicht erweiterten) Komposition, dass die Funktion g mit

$$g(x,y) = f(y,x)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ebenfalls primitiv rekursiv ist.

$$g(x,y) = f(\pi_2^2(x,y), \pi_1^2(x,y))$$

巨7



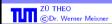
3.4 VA 4

Wir bezeichnen f als eine *erweiterte Komposition* der Funktionen g_1, \ldots, g_k , falls

$$f(x_1,\ldots,x_n)=t\,,$$

so dass t ein Ausdruck ist, der nur aus den Funktionen g_1,\ldots,g_k und den Variablen x_1, \ldots, x_n besteht.

$$f(x,y) = g_1(x, g_2(y, g_3(x)))$$



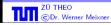




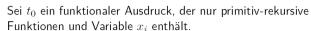


Beweis

Seien
$$x_1,x_2\not\in\{x_i,x_j\}$$
.
$$x_1:=x_i\;;\;\mathsf{LOOP}\;x_j\;\mathsf{DO}\;x_1:=x_1-1\;;\;\;//\;x_1=x_i\div x_j$$
 IF $x_1=0$ THEN $P_1\;;\;x_2:=1$ END ; IF $x_2=0$ THEN P_2 END ;







t enthalte als Teilausdrücke nur $f(m, \overline{x})$ mit einem Variablenvektor \overline{x} , primitiv-rekursive Funktionen, m und Variable x_i .

Dann heißen die Gleichungen

$$f(0,\overline{x}) = t_0, \quad f(m+1,\overline{x}) = t$$

das erweiterte Schema der primitiven Rekursion.



3.4 VA 4



