Script generated by TTT

Title: Meixner: test2 (19.12.2012)

Date: Wed Dec 19 17:45:19 CET 2012

Duration: 92:53 min

Pages: 38

WS 2012/13

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/uebung/

19. Dezember 2012

ZÜ VIII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb
2. Thema: Multimengen Grundlage der Kombinatorik
   Arbeitsblatt 3
   Begriffe, Aufgaben
3. Zusatzaufgabe: Redundante Kodierung
4. Vorbereitung: auf TA Blatt 10:
   Zählen von Relationen (VA1)
   Zählen von Abbildungen (VA2)
   Zählen von Wörtern (VA3)
   Klassifizierungstabelle (VA4)
   Stirling-Zahlen zweiter Art (VA5)

1. Übungsbetrieb

Fragen?

Resümee Klausur: Vorbereitung auf die Endterm

2. Thema: Multimengen Grundlage der Kombinatorik

(Siehe Arbeitsblatt 3, Übungswebseite)

Fundamental für den systematischen Vergleich und die Klassifizierung von Zählproblemen ist der Begriff der

unterscheidbaren bzw. nicht unterscheidbaren Elemente,

d.h. der Begriff der

Multimenge und Zuordnung von Multimengen.

Eine exemplarische Durchführung einer Klassifizierung auf der Grundlage von Multimengen wurde in der Vorlesung in einer tabellarischen Zusammenfassung vorgestellt und ist Gegenstand der Vorbereitungsaufgabe 4 von Übungsblatt 10.

2. Thema: Multimengen Grundlage der Kombinatorik

(Siehe Arbeitsblatt 3, Übungswebseite)

Fundamental für den systematischen Vergleich und die Klassifizierung von Zählproblemen ist der Begriff der

unterscheidbaren bzw. nicht unterscheidbaren Elemente,

d.h. der Begriff der

Multimenge und Zuordnung von Multimengen.

Eine exemplarische Durchführung einer Klassifizierung auf der Grundlage von Multimengen wurde in der Vorlesung in einer tabellarischen Zusammenfassung vorgestellt und ist Gegenstand der Vorbereitungsaufgabe 4 von Übungsblatt 10.

2. Thema: Multimengen Grundlage der Kombinatorik

(Siehe Arbeitsblatt 3, Übungswebseite)

Fundamental für den systematischen Vergleich und die Klassifizierung von Zählproblemen ist der Begriff der

unterscheidbaren bzw. nicht unterscheidbaren Elemente,

d.h. der Begriff der

Multimenge und Zuordnung von Multimengen.

Eine exemplarische Durchführung einer Klassifizierung auf der Grundlage von Multimengen wurde in der Vorlesung in einer tabellarischen Zusammenfassung vorgestellt und ist Gegenstand der Vorbereitungsaufgabe 4 von Übungsblatt 10.

2.1 Begriffe

Multimengen und Unterscheidbarkeit:

Der Begriff einer Multimenge basiert auf der Idee, dass von Elementen einer Menge beliebig viele gleiche, d. h. *nicht unterscheidbare Exemplare* erzeugt und

eine beliebige Gesamtheit von unterscheidbaren oder nicht unterscheidbaren Exemplaren zu einer neuen Struktur zusammengefasst werden können.

Definition:

Eine *Multimenge M über einer Menge B* ist eine Zusammenfassung von *Exemplaren* von Elementen der Menge B (z.B. $M = (a, a, b)$).

Exemplare eines einzelnen Elements $a \in B$ sind dabei nicht unterscheidbar.

Ein Exemplar eines Elements $a \in B$ und ein Exemplar eines Elements $b \in B$ sind unterscheidbar genau dann, wenn $a \neq b$ gilt.

Exemplare werden erzeugt, als logischer Willensakt (logisch konstruiert), und syntaktisch bezeichnet.

Ein Mengenelement x, zu dem ein Exemplar erzeugt wird, kann man *Bestimmungselement* des erzeugten Exemplars nennen.

Demnach kann man zu jeder Multimenge M die Menge B_M aller Bestimmungselemente der Elemente von M bilden. Zwei Elemente einer Multimenge sind *unterscheidbar* genau dann, wenn ihre Bestimmungselemente verschieden sind.

Eine Multimenge N ist eine *Teil-Multimenge* von M, falls von jedem Element x einer beliebigen Menge höchstens so viele Exemplare in N enthalten sind, wie Exemplare davon in M enthalten sind.

Eine Partition einer Multimenge M ist eine Aufteilung von M in disjunkte Teil-Multimengen.

Zuordnung von Multimengen:

Der Begriff der *Abbildung oder Zuordnung einer Multimenge N in eine Multimenge R* wird anschaulich durch das Bild der Verteilung von Bällen aus N auf Schachteln oder Boxen aus R definiert, wobei die Elemente aus N als *Bälle* und die Elemente aus R als *Boxen* bezeichnet werden.

Wir schreiben für Mengen oder (homogene) Multimengen X jeweils

$X\{\neq\}$ bzw. $X\{=\}$, falls X aus

unterscheidbaren (ungleichen) bzw.
nicht unterscheidbaren (gleichen)

Elementen besteht.

Zuordnung von Multimengen:

Der Begriff der *Abbildung oder Zuordnung einer Multimenge N in eine Multimenge R* wird anschaulich durch das Bild der Verteilung von Bällen aus N auf Schachteln oder Boxen aus R definiert, wobei die Elemente aus N als *Bälle* und die Elemente aus R als *Boxen* bezeichnet werden.

Wir schreiben für Mengen oder (homogene) Multimengen X jeweils

$X\{\neq\}$ bzw. $X\{=\}$, falls X aus

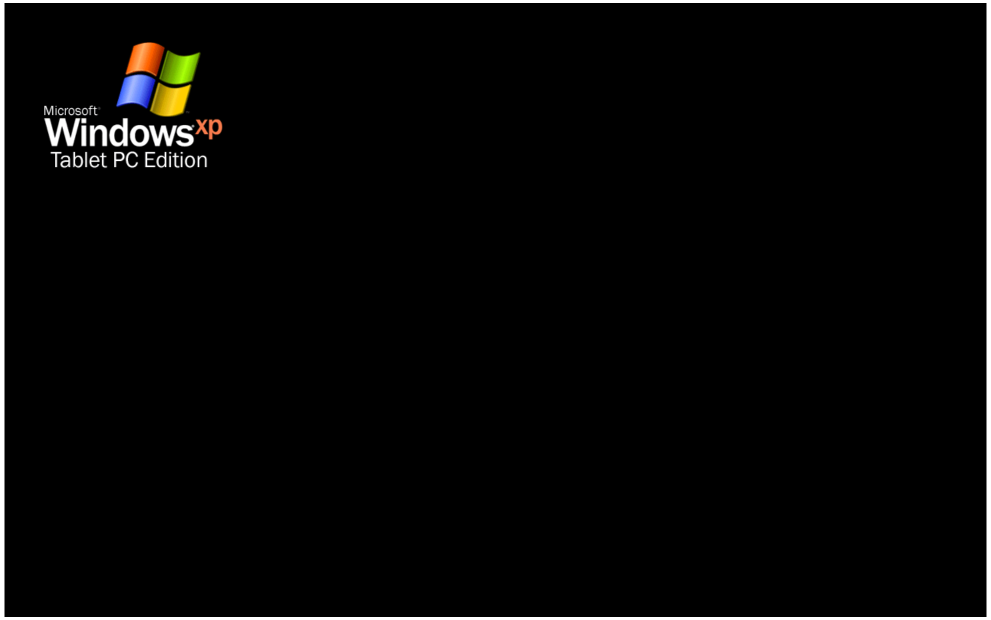
unterscheidbaren (ungleichen) bzw.
nicht unterscheidbaren (gleichen)

Elementen besteht.

$N \longrightarrow R$ $\|N\| = n,\ \|R\| = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r = n)$
$A: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$B: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$C: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

$N \longrightarrow R$ $\|N\| = n,\ \|R\| = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r = n)$
$A: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$B: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$C: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 2.1 Begriffe 8/47



$N \longrightarrow R$ $\|N\| = n,\ \|R\| = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r = n)$
$A: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$B: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$				
$C: \quad N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$				
$D: \quad N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$				

ZÜ DS ©Dr. Werner Meixner 2.1 Begriffe 8/47

2.2 Aufgaben

Studium von Zahlpartitionen: Typ $B3$ und $D3$.

Grundlage auch für Hausaufgaben.

3. Zusatzaufgabe Redundante Kodierung

RS	(Reed, Solomon):	Vorlesung
CRC	(Cyclic Redundancy Code):	Zusatzaufgabe Blatt 10
RSA	(Rivest, Shamir, Adleman):	siehe Buch Steger

4. Vorbereitung auf TA Blatt 10

4.1 VA 1, Zählen von Relationen und Mengen

Sei $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Wir betrachten die Menge aller Relationen $R \subseteq M \times M$.

1. Wie viele Relationen über M gibt es?

Lösung:

Die Anzahl $\text{anz}_{Rel}(M)$ der Relationen über M ist gleich der Anzahl der Teilmengen von $M \times M$.

Wegen $|M \times M| = m^2$ gilt

$$\text{anz}_{Rel}(M) = |\mathcal{P}(M \times M)| = 2^{m^2}.$$

2. Wie viele Relationen über M mit $k \in \mathbb{N}_0$ Elementen gibt es?

Lösung:

Die Frage ist,
wie viele Teilmengen mit k Elementen besitzt $M \times M$,
d. h., welchen Wert besitzt $|\{R \in \mathcal{P}(M \times M)\ ;\ |R| = k\}|$?

Nach Vorlesung besitzt jede Menge mit m Elementen genau

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

k-elementige Teilmengen.

Damit gilt für $k \leq m^2$ (und auch für $k > m^2$)

$$|\{R \in \mathcal{P}(M \times M)\ ;\ |R| = k\}| = \binom{m^2}{k}.$$

3. Wie viele reflexive Relationen über M gibt es?

Lösung:

Zur Konstruktion einer reflexiven Relation über M entfernt man zunächst aus $M \times M$ alle m Paare (x, x) der Identität Id_M,

nimmt dann eine Teilmenge der Restmenge und

fügt anschließend alle Paare der Identität wieder hinzu.

Man beachte, dass das abschließende Hinzufügen der Identität eine injektive Operation darstellt.

Entsprechend erhält man die
Anzahl anz_{refRel} der reflexiven Relationen über M wie folgt.

$$\mathrm{anz}_{refRel}(M) = |\mathcal{P}((M \times M) \setminus \mathrm{Id}_M)| = 2^{m^2-m}.$$

4. Sei A eine n-elementige Menge und
es sei B eine m-elementige Teilmenge von A.

Wie viele Teilmengen C von A gibt es, die B enthalten, für den Fall $n = 5$ und $m = 2$?

Geben Sie eine Formel für den allgemeinen Fall $n, m \in \mathbb{N}_0$ an und begründen Sie diese Formel.

Lösung:

Sei $B \subseteq A$.
Seien $A' := A \setminus B$ und $[B, A] := \{C \subseteq A\,;\ B \subseteq C \subseteq A\}$.

Dann ist $f : [B, A] \to \mathcal{P}(A')$ mit $f(C) = C \setminus B$
eine bijektive Abbildung von $[B, A]$ auf $\mathcal{P}(A')$.

Es gilt wegen $|A'| = n - m$

$$|\mathcal{P}(A')| = 2^{n-m}.$$

Für $n = 5$ und $m = 2$ ergibt sich $|\mathcal{P}(A')| = 2^3 = 8$.

4.2 VA 2, Zählen von Abbildungen

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!

4.2 VA 2, Zählen von Abbildungen

Sei $M = \{0, 1, 2\}$.

1. Listen Sie alle Äquivalenzrelationen über M auf!

Lösung:

Äquivalenzrelationen sind durch
die Menge ihrer zugeordneten Äquivalenzklassen bestimmt.

Über der Grundmenge M mit 3 Elementen gibt es
Äquivalenzrelationen mit 3 Klassen,
mit 2 Klassen und
mit einer einzigen Klasse.

Die Menge der zugeordneten Klassen bildet eine Partition P der Grundmenge M.

Äquivalenzrelationen mit
1 Klasse: $P_{1,1} = \{\{0, 1, 2\}\}$.

Äquivalenzrelationen mit
2 Klassen: $P_{2,1} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$.
$P_{2,2} = \{\{1\}, \{0, 2\}\}$.
$P_{2,3} = \{\{2\}, \{1, 0\}\}$.

Äquivalenzrelationen mit
3 Klassen: $P_{3,1} = \{\{1\}, \{2\}, \{0\}\}$.

2. Wie viele Partitionen gibt es über M?

Lösung:

Die Partitionen entsprechen eineindeutig den Äquivalenzrelationen.

Also gibt es 5 Partitionen über M.

3. Gibt es eine Äquivalenzrelation über der leeren Menge?

Lösung:

Falls $M = \emptyset$,
dann ist $R = \emptyset$ eine Äquivalenzrelation über M.

Aus $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ folgt,
dass $\emptyset$ die einzige Relation über $\emptyset$ ist.

Die Menge der Klassen dieser Relation R ist leer.
Damit entspricht die leere Menge von Klassen in diesem Fall einer (einzigen) Partition von M.

4. Wie viele surjektive Abbildungen f von M auf $M' = \{1, 2\}$ gibt es?

Lösung:

Damit f surjektiv ist, muss $\{k_1, k_2\}$ mit $k_1 := f^{-1}(1)$ und $k_2 := f^{-1}(2)$ eine 2-elementige Partition über M bilden.

Also kommen nur
die Partitionen $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ und $P_{2,3}$ für $\{k_1, k_2\}$ in Frage.

Für die Zuordnung der Urbildklassen k_1, k_2 zu den Klassen der Partitionen $P_{i,j}$ gibt es nun stets 2 Möglichkeiten.

Deshalb erhalten wir insgesamt 6 surjektive Abbildungen.

5. Wie viele injektive Operationen $f : M \to M$ gibt es?

Lösung:

Eine injektive Operation über einer endlichen Menge M ist gleichzeitig surjektiv und damit bijektiv.

Für die Abbildung von 0 gibt es 3 Möglichkeiten.

Für jede dieser Möglichkeiten gibt es dann 2 Möglichkeiten der Abbildung des Elementes 1.

Damit erhalten wir $2 \cdot 3 = 6$ injektive Operationen über M.

6. Geben Sie alle Variationen von M an!

In der Vorlesung haben wir dafür k-Permutation gesagt.
D.h., die Begriffe k-Variation und k-Permutation sind synonym.

Lösung:

Eine k-Variation (k-Permutation) einer Menge A wurde als Sequenz $q_1, q_2, \ldots, q_k$ der Länge k von paarweise verschiedenen Elementen q_i aus A definiert.

Eine k-Variation mit $k = |A|$ wird Permutation von A genannt.

Wir ordnen jeder Variation $q_1, q_2, \ldots, q_k$ über einer endlichen Menge A in eineindeutiger Weise eine bijektive Abbildung $f : [1, k] \to A$ wie folgt zu

$$f(i) = q_i \,.$$

Fall $k = 1$:

Wir erhalten die folgenden 3 Abbildungen s_1, s_2, s_3. (gespiegelte Liste).

	s_1	s_2	s_3
1	0	1	2

Fall $k = 0$:

Wir erhalten die leere Sequenz bzw. leere Abbildung als einzige Variation der Länge 0.

Fall $k = 1$:

Wir erhalten die folgenden 3 Abbildungen s_1, s_2, s_3. (gespiegelte Liste).

	s_1	s_2	s_3
1	0	1	2

Fall $k = 0$:

Wir erhalten die leere Sequenz bzw. leere Abbildung als einzige Variation der Länge 0.

2. Bestimmen Sie die Anzahl aller Wörter, die sich aus den Buchstaben des Wortes

   MINIMALISIERUNG

   bilden lassen.

   Dabei darf und muss jedes Vorkommen eines Buchstaben des o. g. Wortes genau einmal verwendet werden.

Lösung:

Das gegebene Wort hat 15 Buchstabenvorkommen mit den folgenden Vielfachheiten:
A - 1, E - 1, G - 1, I - 4, L - 1, M - 2, N - 2, R - 1, S - 1, U - 1.

Würden alle Buchstabenvorkommen zu verschiedenen Buchstaben gehören (d. h. unterscheidbar sein), dann gäbe es $15!$ verschiedene Wörter.

Allerdings sind jeweils $4! \cdot 2! \cdot 2!$ der Wörter gleich, weil sie sich nur durch Vertauschung gleicher Buchstabenvorkommen zu I, M bzw. N ergeben.

Damit ergibt sich die Anzahl der verschiedenen Wörter mit

$$\frac{15!}{4!2!2!} = 13621608000\,.$$

4.4 VA 4

In der Vorlesung wurde mit der folgenden Tabelle die Basis für eine Klassifizierung kombinatorischer Aufgabenstellungen und Lösungen geschaffen.

Die Formeln der Tabelle gelten für alle $n, r \in \mathbb{N}_0$.

$N \longrightarrow R$ $\lvert N \rvert = n,\ \lvert R \rvert = r$	1 beliebig	2 injektiv	3 surjektiv	4 bijektiv $(r=n)$
$A:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{\neq\}$	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r!S_{n,r}$	$r! = n!$
$B:\ N\{=\} \longrightarrow R\{\neq\}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$C:\ N\{\neq\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} S_{n,i}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
$D:\ N\{=\} \longrightarrow R\{=\}$	$\sum_{i=0}^{r} P_{n,i}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1

Lösung:

Aufg. :	Lösg.	Formel	Abbildung	
VA 1.1:	$\lvert M \times M \rvert = m^2$	A1	$N\{\neq\} = \{1,2\}$,	$R\{\neq\} = M$
VA 1.1:	$anz_{Rel} = 2^{m^2}$	A1	$N\{\neq\} = M \times M$,	$R\{\neq\} = \{0,1\}$

Man beachte, dass in Zeile 2 eine Relation,
d.h. eine Teilmenge von $M \times M$,
eineindeutig als charakteristische Funktion $\chi : M \times M \to \{0,1\}$
dargestellt wird.